

一、(本题满分 15 分) 设 $p(x)$ 是整值多项式, 且在 5 个整数点上都取值 5. 证明: $p(x)$ 没有整数根.

二、(本题满分 15 分) 设 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

三、(本题满分 15 分) 设 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 均为整数, 证明以下方程组只有零解.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \frac{1}{2}x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \frac{1}{2}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

四、(本题满分 15 分) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $m \times s$ 矩阵, 证明: 矩阵方程 $AX = B$ 有解的充要条件是 $R(A) = R(A: B)$.

五、(本题满分 15 分) 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵, 证明: $A+B$ 的最大特征值大于 A 的最大特征值.

六、(本题满分 15 分) 设 V_1, V_2, \dots, V_s 是线性空间 V 的一些子空间, 证明: 和 $\sum_{i=1}^s V_i$ 是直和的充分必要条件是

$$V_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} V_j = \{0\} \quad (i=2, \dots, s)$$

七、(本题满分 15 分) 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 试证 AB 与 BA 有相同的特征值.

八、(本题满分 15 分) 设 A 为实反对称矩阵 ($A = -A^T$), E 为同阶单位矩阵, 试证 $A+E$ 是非奇异矩阵.

九、(本题满分 15 分) 求出下列二次曲线的标准方程, 并写出相应的坐标变换公式.

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$$

十、(本题满分 15 分) 设一柱面的母线方向与三条坐标轴正向交成等角, 且其母线总长与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 相切, 求它的方程.