

310

中国地质大学研究生院

2004 年研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学(统考)

适用专业: 固体地球物理、矿物岩石学、矿物材料科学、
土地资源管理、环境科学、环境工程、计算机应用技术(特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题
纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

一、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

1 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2 设函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 处的偏导数存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x, b) - f(a-x, b)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $\int_0^1 f(x) dx = a$, 则 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

4 过点 $(1, 2, -1)$, 且与直线 $\begin{cases} 2x-3y+z-5=0 \\ 3x+y-2z-4=0 \end{cases}$ 垂直的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5 函数 $f(x) = \sin x - x \cos x$ 在区间 $(-2\pi, 2\pi)$ 中恰有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个零点.

6 设 $f(x) = \cos \sqrt[3]{x^3}$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

7 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2-x-6}$ 的间断点的个数为

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4. []

8 设 $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$, 则

(A) $F(x) \equiv 0$; (B) $F(x) \equiv \frac{\pi}{2}$;

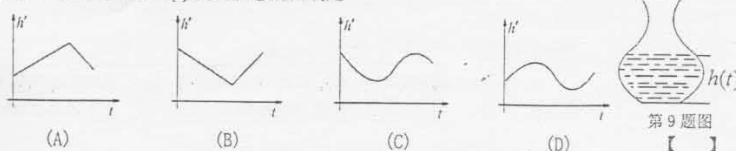
(C) $F(x) \equiv \arctan x$; (D) $F(x) \equiv 2 \arctan x$. []

准考证号码:

报考学科、专业:

姓名:

- 9 如图有一容器, 假定以匀速向容器内注水, $h(t)$ 为容器中水平面高度随时间变化的变化规律, 则正确反映 $h'(t)$ 变化状态的曲线是



- 10 设 $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$, 其中函数 φ, ψ 具有二阶导数, 则必有
(A) $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$; (B) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$; (C) $z''_{xy} = 0$; (D) $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$. 【 】

- 11 设区域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2$, $f(x, y)$ 是定义在 D 上的连续函数, 则 $\iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$
(A) $2\pi \int_1^2 r f(r^2) dr$; (B) $2\pi [\int_0^2 r f(r^2) dr - \int_0^1 r f(r^2) dr]$;
(C) $2\pi \int_1^2 r f(r) dr$; (D) $2\pi [\int_0^2 r f(r) dr - \int_0^1 r f(r) dr]$. 【 】

- 12 设 $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n} (n=1, 2, \dots)$, 则下列级数中一定收敛的是
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$. 【 】

- 13 微分方程 $2yy'' = (y')^2$ 的通解 $y =$
(A) $(x - C_1)^2$; (B) $C_1(x-1)^2 + C_2(x-1)^2$;
(C) $C_1 + (x - C_2)^2$; (D) $C_1(x - C_2)^2$. 【 】

- 14 已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m$, 则 $\begin{vmatrix} 2a_1 & b_1 + c_1 & 3c_1 \\ 2a_2 & b_2 + c_2 & 3c_2 \\ 2a_3 & b_3 + c_3 & 3c_3 \end{vmatrix} =$
(A) $2m$; (B) $3m$; (C) $6m$; (D) $12m$. 【 】

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答写出演算步骤或证明过程)

- 15 (本题满分 10 分) 计算 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx$.

- 16 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 问:

特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题纸上及草稿纸上无效。
考完后试题随答题纸一起交回。

- (1) α 在什么范围内, $f(x)$ 在 $x=0$ 连续?
(2) α 在什么范围内, $f(x)$ 在 $x=0$ 可导?

17 (本题满分 10 分) 设函数 f 二阶可导, $f'(0)=1$, $f''(0)=\frac{1}{2}$, 且 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ 与 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

18 (本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, $f(\pi)=1$, 且已知方程

$$y\left[\frac{\sin x - f(x)}{x}\right]dx + f(x)dy = 0$$

是全微分方程, 求 $f(x)$.

19 (本题满分 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n} (x-1)^n$ 的收敛域.

20 (本题满分 12 分) 一球形贮液罐, 半径为 r , 装满了比重为 ρ 的液体. 现将罐中全部液体从顶部出口抽出, 需作多少功?

21 (本题满分 12 分) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是一组向量, 假设: (1) $\alpha_1 \neq 0$; (2) 每一个 α_i 都不能被它前面的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ ($i=2, \dots, s$) 线性表出. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

22 (本题满分 12 分) 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+3)x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + (a-1)x_2 + bx_3 = a-1 \end{cases}$$

问 a, b 为何值时, 方程组有无穷多解? 有无穷多解时, 求出其全部解.

23 (本题满分 8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) \cdot f(b) > 0$, $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$. 求证: 对于任意给定的非零实数 k , 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = kf'(\xi)$.