

412

中国地质大学研究生院

2004 年研究生入学考试试题

考试科目：解析几何与高等代数

适用专业：应用数学

(特别提醒：所有答案都必须写在答题纸上，写在本试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

一、(本题满分 15 分) 设 $f(x), g(x), h(x) \in P[x]$, 满足

$$(x^2 + 1)h(x) + (x - 1)f(x) + (x + 2)g(x) = 0,$$

$$(x^2 + 1)h(x) + (x + 1)f(x) + (x - 2)g(x) = 0.$$

证明: $(x^2 + 1) | (f(x), g(x))$.二、(本题满分 15 分) 计算下列 n 阶矩阵的秩 $R(A)$ ($n \geq 3$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

三、(本题满分 15 分) 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 证明 $R(AB) = R(B)$ 的充分必要条件是线性方程组 $(AB)x = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解 (其中 $R(B)$ 表示矩阵 B 的秩).

四、(本题满分 15 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1(2n)}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2(2n)}x_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n(2n)}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为

$$\left(\begin{array}{c} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1(2n)} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} b_{21} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{2(2n)} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c} b_{n1} \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{n(2n)} \end{array} \right),$$

求解线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1(2n)}x_{2n} = 0, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2(2n)}x_{2n} = 0, \\ \dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{n(2n)}x_{2n} = 0. \end{cases}$$

五、(本题满分 15 分) 设 A 、 B 是两个 n 阶实对称矩阵, A 的特征值均大于 a , B 的特征值均大于 b , 证明: $A+B$ 的特征值均大于 $a+b$.

六、(本题满分 15 分) 设 V_1 , V_2 , ..., V_s 是线性空间 V 的 s 个非平凡子空间, 证明: V 中至少有一个向量不属于 V_1 , V_2 , ..., V_s 中的任何一个.

七、(本题满分 15 分) 设线性变换 A 、 B 满足 $A^2 = A$ 、 $B^2 = B$, 证明: A 与 B 有相同的核的充分必要条件是 $AB = A$ 、 $BA = B$.

八、(本题满分 15 分) 设二次型 $f = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$ ($b > 0$), 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 利用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出所用的正交变换矩阵.

九、(本题满分 15 分) 求通过点 $P(2, 1, 1)$ 且与球面 $(x-7)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$ 相切的锥面方程.

十、(本题满分 15 分) 确定 k 的值, 使 $5x^2 + 3y^2 + kz^2 + 2xz + 15 = 0$ 表示旋转曲面.