

中国地质大学研究生院

2005 年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 334 数学分析

适用专业: 应用数学

(特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在本试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

1. (本题满分 10 分)

$$\text{计算 } \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx$$

2. (本题满分 10 分)

$$\text{设 } y = y(x) \text{ 由参数方程 } \begin{cases} x = \cos t^2 \\ y = t \cos t^2 - \int_1^t \frac{1}{2\sqrt{u}} \cos u du \end{cases} \text{ 确定,}$$

$$\text{求 } \frac{d^2 y}{dx^2}$$

3. (本题满分 10 分)

$$\text{已知 } F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt, f(x) \text{ 连续, } f(0) = 0, f'(0) = 1, \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$$

4. (本题满分 10 分)

$$\text{设 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = q, (q < 1), \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

5. (本题满分 10 分)

$$\text{设 } f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad n \text{ 为自然数. 问在什么条件下:}$$

- (1) 在 $x=0$ 处连续? (2) 在 $x=0$ 处可导?
(3) 在 $x=0$ 处导函数连续?

准考证号码:

答题线内不要密封

报考学科、专业:

姓名:

6. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的正值连续函数, 且 $f(x)$ 单调减少.

证明:
$$\frac{\int_0^1 xf''(x)dx}{\int_0^1 xf'(x)dx} \leq \frac{\int_0^1 f''(x)dx}{\int_0^1 f'(x)dx}.$$

7. (本题满分 15 分)

设 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, 试证 $f(x)$ 分别在 $(-1, 0)$ 及 $(0, 1)$ 上一致连续, 但

$(-1, 0) \cup (0, 1)$ 上不一致连续.

8. (本题满分 10 分)

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ 也发散.

9. (本题满分 10 分)

求曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

函数 $f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \\ 0, & z < \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

10. (本题满分 10 分)

设 $z = \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi(xy)e^{2x-y}$, 其中 φ 二阶可微, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

11. (本题满分 10 分)

设 $0 < a < b$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得: $be^a - ae^b = (b-a)(1-\xi)e^{\xi}$.

12. (本题满分 10 分)

设 $f_0(x)$ 是 $[0, a]$ 上的连续函数, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$.

证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 0.

特别提醒：所有答案都必须写在答题纸上，写在本试题纸上及草稿纸上无效。
考完后试题随答题纸一起交回。

13. (本题满分 10 分)

设 $\int_1^{-x} \frac{1}{x^p \log_a x} dx$, 讨论收敛性.

14. (本题满分 15 分)

将函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$ 展开成 x 的幂级数, 并求收敛区间.