中国地质大学研究生院

2006 年 硕士 研究生入学考试试题

考试科目：高等数学(统考) 310

适用专业：考高等数学的有关专业

（特别提醒：所有答案都必须写在答题纸上，写在试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。）

准考证号码：10491620124292 6

报考学科、专业：计算机软件理论

姓名：姚明波

密 封 线 内 不 要 答 题

一、填空题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分)

1 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $f'(1)=$______.

2 设函数 $f(x)$ 可导，$f'(0)\neq 0$，且 $\begin{cases} x=f(t)-1 \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$______.

3 曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$，在点 $(0,0)$ 处的切线方程是__________.

4 $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=$______.

5 设 n 阶方阵 A,B 满足关系式 $A=\dfrac{1}{2}(B+E)$，且 $A^2=A$，则 $B^2=$_____.（其中 E 是 n 阶单位矩阵）.

6 微分方程 $y''-4y'+4y=e^x$ 的通解 $y=$________________.

二、选择题(本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求)

7 下列极限正确的是（　　）

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{2-3x}=e^2$；　　（B）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=e^2$；

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+xe^x\right)^{\frac{1}{x}}=e^x$；　　（D）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=e^{2a}$.

8 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数，且 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内（　　）.

（A）单调增加；　　（B）单调减少；

（C）先单调增加，然后单调减少；　　（D）上述 A,B,C 都有可能.

2

9 直线$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$与平面$A(x-a)+B(x-b)+C(x-c)=0$相垂直的充要条件为（　　）.

（A）$m=A,n=B,p=C$；　　（B）$mA+nB+pC=0$；

（C）$\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$；　　（D）$x_0=a,y_0=b,z_0=c$.

10 设$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的偏导数$f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)$都存在，则必有（　　）成立.

（A）存在常数k，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=k$；　　（B）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$；

（C）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)=f(x_0,y_0)$与$\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)=f(x_0,y_0)$；

（D）$\Delta f-df=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

11 设常数$k>0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（　　）.

（A）发散；　　（B）绝对收敛；

（C）条件收敛；　　（D）敛散性与k有关.

12 若行列式$\begin{vmatrix}1 & a & -2\\ 8 & 3 & 5\\ -1 & 4 & 6\end{vmatrix}$的代数余子式$A_{21}=4$，则$a=$（　　）.

（A）1；　　（B）2；

（C）4；　　（D）-2.

三、解答题（本题共10小题，满分102分. 解答写出演算步骤或证明过程）

13（8分）计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

14（8分）讨论$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & x>0\\ xg(x), & x\le 0\end{cases}$在$x=0$处的连续性，可导性. 其中$g(x)$是连续函数.

15（8分）已知曲线$y=f(x)$过点$(0,2)$，且其上任一点(x,y)处的切线斜率为$x\ln(1+x)$，求$f(x)$.

16（8分）设$f(x,y)$有连续的二阶偏导数，

$$df(x,y)=(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy,$$

试决定a,b的值.

注：①试题必须打印。②题与题之间不要留答题间隔。③试题必须打印在试题纸正面。④试题格式要统一，打印要工整、清楚，符号应规范。

17（8 分）计算 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,dxdy$.

18（12 分）设 a,b 为正常数，λ 为非负数，微分方程 $\frac{dy}{dx}+ay=be^{-\lambda x}$.

（1） 求该方程的通解；

（2） 证明：当 $\lambda=0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{b}{a}$.

19（14 分）设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$.

（1） 求收敛半径和收敛域；

（2） 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ 的和.

20（14 分）设曲线 $y=ax^2\ (a>0, x\ge 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形．问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？

21（14 分）已知方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3 \end{cases}$，

（1） 证明当 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不等时，方程组无解；

（2） 设 $a_1=a_3=1$，$a_2=a_4=-1$，求其通解.

22（8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\int_0^{\xi} f(x)dx=f(\xi)$.