

2 0 0 6

碩博年

考试科目:

解析几何与高等代数

497

适用专业:

应用数学

一、(本题满分 15 分) 证明: 对于任意正整数 n , 都有 $(f(x), g(x))^n = (f^n(x), g^n(x))$.

二, (本题满分 15 分) 计算 n 级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

三, (本题满分 15 分) 设线性方程组

[illegible]

的一个基础解系为 $(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1,2n}), (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2,2n}), \dots, (b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{n,2n}),$

试写出线性方程组

[illegible]

的一般解 (通解), 并说明理由.

四、(本题满分 15 分) 令 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶方阵, 试推导 A 的秩与 A^* 的秩的关系.

准考证号码: 104916402243581

应用数学

报考学科、专业:

姓名: 种坤燕

密 封 线 内 不 要 答 题

五, (本题满分 15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} Q & g \\ g' & r \end{pmatrix}$, 其中 Q 是 $n-1$ 级正定矩阵, g 是 $n-1$ 维列向

量, 证明 A 是正定矩阵的充分必要条件是 $r > g'Q^{-1}g$.

六, (本题满分 15 分) 设 n 级方阵 A, B, C, D 两两可交换, 且满足 $AC + BD = E$. 记

$ABx = 0$ 的解空间为 W , $Bx = 0$ 的解空间为 W_1 , $Ax = 0$ 的解空间为 W_2 , 证明

$$W = W_1 \oplus W_2.$$

七, (本题满分 15 分) 设 A 是有限维线性空间 V 的线性变换, W 是 V 的子空间, AW 表示由 W 中向量的像组成的子空间, 证明: $\dim(AW) + \dim(A^{-1}(0) \cap W) = \dim(W)$.

八, (本题满分 15 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 为欧氏空间 V 的两组向量, 证明: 如果 $(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$), 则子空间 $V_1 = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 与 $V_2 = L(\beta_1, \dots, \beta_m)$ 同构.

九, (本题满分 15 分) 已知两直线 $l_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$, $l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$, 试证明这两条直线为异面直线, 并求它们之间的距离和公垂线方程.

十, (本题满分 15 分) 试证明经过单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的一条直母线的每一个平面一定经过属于另一族直母线中的一条直母线. 这样的结论对于双曲抛物面成立吗?