

# 中国地质大学研究生院

二〇〇六年<sup>硕博</sup>士研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析 334

适用专业: 应用数学

(特别提醒: 所有答案都必须写在答题纸上, 写在本试题纸上及草稿纸上无效。考完后试题随答题纸一起交回。)

1. (本题满分 10 分)

计算函数  $f(x) = x^4 e^{x^2}$  在  $x = 0$  处的 2006 阶导数.

2. (本题满分 10 分)

计算  $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ .

3. (本题满分 10 分)

设  $y = y(x)$  由等式  $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y^3 + 3ty + 1 = 0 \end{cases}$  确定, 求  $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{t=0}$

4. (本题满分 10 分)

设  $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = \sqrt{u_n u_{n-1}}, n = 2, 3, \dots$ , 证明该数列的极限存在, 并求其极限.

5. (本题满分 15 分)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

(1) 问在  $(0, 0)$  点一阶偏导数是否存在? 是否连续?

(2) 问在  $(0, 0)$  点是否可微?

准考证号码:

报考学科、专业:

姓名:

题  
答  
要  
不  
内  
线  
封  
密



## 6. (本题满分 13 分)

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有一阶连续导数, 且  $f(a) = 0$ , 证明下列不等式:

$$(1) \int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx;$$

$$(2) \int_a^b |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

## 7. (本题满分 12 分)

设  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

证明 (1):  $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

$$(2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

## 8. (本题满分 10 分)

计算积分  $I = \iiint_{\Omega} \frac{e^z}{\sqrt{x^2 + y^2}} dV$ , 其中  $\Omega$  由  $z = 1, z = 2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

所围.

## 9. (本题满分 10 分)

计算形体  $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  的表面积.

## 10. (本题满分 10 分)

设  $y = f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  内的一光滑下凸函数,  $(x_0, y_0)$  是曲线

$y = f(x)$  上方的一固定点, 试求在过  $(x_0, y_0)$  与曲线  $y = f(x)$  相

交的所有弦中, 与曲线  $y = f(x)$  所围成弓形面积最小的弦的位置.



特别提醒：所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸上及草稿纸上无效。  
考完后试题随答题纸一起交回。

11. (本题满分 10 分)

设  $f(x)$  在闭区间  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$

证明存在  $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ , 使得:  $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 2$ .

12. (本题满分 10 分)

设  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ , 求它的收敛域, 证明它在收敛域内绝对一致收敛.

13. (本题满分 10 分)

判别级数  $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$  的收敛性。

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx =$$

14. (本题满分 10 分)

设  $a_n = \frac{n}{\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx}$  讨论级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$  的敛散性, 若收敛

则求和。