1999年华中科技大学高等代数考研试题

一.(18分) (1) 设 A 是 n 阶方阵, $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, 试证线性方程组 $AX=0$ 与 $A^2X=0$ 同解的充要条件是 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A^2)$.

(2) 设 $A^2=E$, 试证 A 相似于对角矩阵.

二.(18分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}$$

试求满足 $X^2=A$ 的矩阵 X.

三.(18分) 在 R^3 中, 设线性变换 T 在基 $\alpha_1=(1,0,0)^T$, $\alpha_2=(1,2,0)^T$, $\alpha_3=(1,2,3)^T$ 下有 $T(\alpha_1)=3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$, $T(\alpha_2)=2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$, $T(\alpha_3)=-\alpha_1+\alpha_3$; 线性变换 S 在基 $\beta_1=(1,0,-1)^T$, $\beta_2=(0,1,1)^T$, $\beta_3=(-1,1,1)^T$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

试求 $T+S$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵.

四.(18分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为数域 K 上 n 维向量空间 V 的基, $x_i=c_i$ ($c_i\in K$, $i=1,2,\cdots,n$) 是方程 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i=0$ 的解 ($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 K 中不全为 0 的数). 试证所有 $\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$ 组成 V 的一个 $(n-1)$ 维子空间.

试题编号: 1502 共 1 页

五.（18分） 设σ是欧氏空间V上的一个变换．试证如果σ保持内积不变，那么它一定是线性的，因而它是正交变换．

六.（10分） 设n×n矩阵有n个不同的特征根．试证凡与A可交换的矩阵B一定可表成A的一个次数≤n-1的多项式．