華中科技大學

二〇〇二年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：常微分方程

适用专业：应用数学、计算机软件与理论

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

第 1 至 4 题每题 12 分，第 5 至 7 题每题 15 分，第 8 题 7 分.

1. 求通解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$.

2. 求通解：$\dfrac{dx}{y+z}=\dfrac{dy}{x+y-z}=\dfrac{dz}{y+z}$.

3. 求解：$yy''+y'^2=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$.

4. 求解：$x^2y'+xy+\int_1^x y(t)\,dt=10x^3,\qquad y(1)=4$.

5. (i) 利用正弦级数证明，对任何 $u\in C_0^1[0,1]=\{u\mid u\in C^1[0,1],u(0)=u(1)=0\}$，下述不等式成立：

$$\pi^2\int_0^1|u(x)|^2\,dx\leqslant\int_0^1|u'(x)|^2\,dx.$$

(ii) 设 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times(-\infty,+\infty)$ 上连续且满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leqslant L|y-z|,\quad \forall x\in[0,1],\ y,z\in(-\infty,+\infty).$$

试利用 (i) 证明：当 $L<\pi^2$ 时边值问题

$$u''=f(x,u),\ x\in(0,1),\qquad u(0)=u(1)=0$$

解是唯一的. 又，当 $L=\pi^2$ 时解唯一吗？请考虑 $f(x,u)=-\pi^2u$.

试卷编号：524

6. 设 $a \geqslant 0, b > 0$. 求出方程组

$$x'(t) = y, \quad y'(t) = a(1 - x^2)y - bx$$

的奇点，确定其类型，并判断其稳定性。

7. 设 $g(t)$ 在 $[0,a]$ 上连续，三元函数 $K(t,x,u)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant t \leqslant a, -\infty < u < \infty$ 上连续，且存在常数 $L > 0$ 使得 $\forall 0 \leqslant x \leqslant t \leqslant a, -\infty < u, v < \infty$,

$$|K(t,x,u) - K(t,x,v)| \leqslant L|u - v|.$$

试证明方程

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t,x,u(x))\,dx$$

存在唯一解.

8. 以下 A,B 二题任选一题.

A. 设 $\alpha(t), \beta(t), y(t)$ 均为 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数，满足

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \alpha(s)\,ds = \gamma,$$

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) = 0,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha(t)y(t) = \beta(t), \qquad t \geqslant 0,$$

其中 $T > 0, \gamma > 0$. 试证明 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

B. 设 α, β 是正常数， $f(t)$ 是连续的周期为 ω 的周期函数，试证明方程

$$y'' + \alpha y' + \beta^2 y = f(t)$$

存在唯一的周期为 ω 的周期解.