華中科技大学

二〇〇二年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学

适用专业：物理系

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

一、填空题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\csc x-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=$ ________.

2. 若 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & x\neq 0\\ A & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，

则 $A=$ ____ $f'(0)=$ ______.

3. 曲线 $e^y+\sin(xy)=1$ 在 $(0,0)$ 点的切线方程为________.

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+x^{10}}+\cos^5 x\right)dx=$ ______.

5. 微分方程 $xdy+(\ln x-1-\ln y)ydx=0$ 的通解是________.

6. 设 L 是 xoy 平面上沿顺时针方向绕行的简单闭曲线，

且 $\oint_L (x-2y)dx+(4x+3y)dy=-9$，

则 L 所围成的平面闭区域 D 的面积等于______.

7. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，

则积分 $\oiint_\Sigma x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=$ ___________.

8. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的和函数为___________.

9. 将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，

则系数 $a_2=$ ______.

10. 若 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ _________.

试卷编号：395

准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密 封 线 内 不 要 答 题

二、解答题(本大题共 10 小题,每小题 7 分,满分 70 分)

1. 设$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \int_0^t \frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u \end{cases}$,求$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

2. 证明$\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$,其中$f(x)$在$[-1,1]$连续.

3. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,(a,b)内可导,证明,存在$\xi \in (a,b)$使

$$f'(\xi) = 2(\xi - a)\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2}.$$

4. 求$x^2 + y^2 \geqslant x, x^2 + y^2 \leqslant 2x, z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$和$z \geqslant 0$公共部分的体积.

5. 若$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求$|2AA^*|$.

6. 证明:方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$ 有解$\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 0$.

7. 将二次型$f = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$化为标准型.

8. 设$V_{环}$为圆$(x-a)^2 + y^2 = R^2 (a > R)$绕$y$轴旋转所得的旋转体的体积,$V_{柱}$是半径为$R$,高度为$2\pi a$的圆柱体的体积,证明$V_{环} = V_{柱}$.

9. 证明(i) $(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \frac{n\pi}{4})$.

(ii) $(\sqrt{2})^n \sin(x + \frac{n\pi}{4}) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \sin(x + \frac{i\pi}{2})$

10. (i) 求椭圆$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta, \end{cases}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$的曲率$K(\theta)$.

(ii) 证明:椭圆恰有四个顶点(其中曲率$K(\theta)$取得极值的点称为顶点).

试卷编号:395