華中科技大學

二○○二年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数理方程与泛函分析

适用专业：应用数学、基础数学

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密 封 线 内 不 要 答 题

(20 分) 一. 求以下弦振动方程的解

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x\sin t \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0), \\ u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = -x. \end{cases}$$

(20 分) 二. 求以下热传导方程的解

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 \quad (0 < x < \pi,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u_t(0,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

(10 分) 三. 设 u 是以下定解问题的解

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \quad (0 < x < l,\ t > 0), \\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,0) + u_t(l,0) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

证明当 t 适当大时，以下函数关于 t 是单调不增的.

$$G(t) = \int_0^l [t(u_t^2 + u_x^2) + 4xuu_t]dx.$$

试卷编号：520

(20 分) 四. 设 s 是所有复数列 $x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 组成的集合. 定义

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y=\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. 证明 (s,d) 是一个完备的度量空间.

(20 分) 五. 设 X 是 Banach 空间, T 是从 X 到 X 中的有界线性算子. 以 $\rho(T)$ 和 R_λ 分别表示 T 的预解集和预解式. 则

$$R_\lambda-R_\mu=(\mu-\lambda)R_\lambda R_\mu,\quad \lambda,\mu\in\rho(T)$$

及

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda=(-1)^n n!R\lambda^{n+1},\quad \lambda\in\rho(T),\ n=1,2,\cdots.$$

(10 分) 六. 设 T 是 Hilbert 空间 H 中的自伴算子. 利用自伴算子的谱分解定理证明 T 的谱 $\sigma(T)$ 是实轴上的一个子集.