

华中科技大学

二〇〇二 年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析

适用专业: 应用数学, 计算数学, 概率统计, 基础数学

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

以下共 10 题, 每题 10 分

1. 求
$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 \sqrt[3]{2n^2} \left(\sin \frac{1}{n} - \operatorname{arccot} n \right)}{\ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n \ln n} \right)}.$$

2. 设函数 $x = x(u, v)$ 满足方程组

$$\begin{cases} F(x, f(y, u)) = 0, \\ G(y, g(x, v)) = 0, \end{cases}$$

其中 F, G, f, g 均为连续可微函数, 且 $F_1 G_1 \neq F_2 G_2 f_x$, F_1 记 F 对其第一变元的偏导数, F_2, G_1, G_2 仿此, 求 $\frac{\partial x}{\partial u}$ 与 $\frac{\partial x}{\partial v}$.

3. 设 $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的可微函数, $f(0) = f(1) = 0$, 当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) > 0$, $\varphi(x) = \ln f(x)$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\varphi'(\xi) = 1$.

4. 证明不等式 $xy^2z^3 \leq (x + y + z)^6 / 432$ ($x, y, z \geq 0$).

试卷编号: 325

共 2 页
第 1 页

准考证号:

报考学科、专业:

姓名:

密封线内不要答题

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可微且至少有一个零点, 证明

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

6. 求 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$, 其中 L 是反时针方向的圆周 $x^2 + y^2 = 1$.

7. 设有界空间区域 V 的体积为 v , V 的边界 Σ 为光滑闭曲面, n 是 Σ 的内法向量; $r = xi + yj + zk$, $r = |r|$. 求 $I = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(r, n)}{r} dS$, (r, n) 记 r 与 n 的夹角.

8. 证明: 对充分大的自然数 n 有近似公式

$$\sqrt{n+1} \approx \frac{2n+1}{2n} \sqrt{n};$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其误差 R_n 与 $-\frac{1}{8n^{3/2}}$ 是等价无穷小.

9. 展开 $f(x) = \sin x + \cos x$ 为 $[0, \pi]$ 上的正弦级数.

10. 设 $\{f_n(x)\}$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数序列, 它在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$. 假定每个 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上不处处为负, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 亦不处处为负.