



3. (8分) 求下列积分.

$$(1) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$(2) \int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$(3) \int_{1/e}^e |\ln x| dx$$

$$(4) \int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

4. (8分) 设方程  $xy + yz + zx = 1$  确定了隐函数  $Z = Z(x, y)$ . 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ .

5. (8分) 将  $f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{e^x - e}{x - 1} \right)$  在  $x = 1$  处展成幂级数.

6. (8分) 求  $I = \oint_L \frac{y dx - (x-1) dy}{(x-1)^2 + y^2}$ .  $L$  为  $oxy$  平面内任一闭合分段光滑曲线, 方向为正方向, 点  $(1, 0)$  不在  $L$  上.

7. (8分) 求  $I = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} \frac{\sin x}{x} dx$ .

8. (8分) (1) 叙述洛尔微分中值定理, (2) 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使  $f(\xi) \int_a^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^b f(x) dx$ .

9. (8分) (1)  $a$  为何值时  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  为正定二次型.

(2) 求正交矩阵  $T$ , 使  $T^{-1}AT$  为对角形矩阵, 其中  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ .

10. (8分) 设  $A, B$  为两个  $n$  阶方阵, 证明  $r(AB) = r(B)$  的充要条件是方程组  $ABX = 0$  与  $BX = 0$  有完全相同的解, 其中  $X$  为  $n$  维列向量(未知).

11. (8分) 在一批同一规格的产品中, 甲、乙厂生产的产品分别为 30%, 70% 合格率分别为 98%, 90%. (1) 求这批产品的合格率 (2) 若一顾客买了一件, 发现为次品, 这件产品为甲厂生产的概率为多少?