

华中科技大学

二〇〇三年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数 学

适用专业: 物 理

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共计 20 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 1} \right)^x =$ _____

2. 设 L 为 $x^2 + y^2 = a^2$ 在第一象限内的 $\frac{1}{4}$ 圆弧, 则 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds =$ _____

3. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x=-4$ 处条件收敛, 则该幂级数的收敛半径为 _____

4. 设 A 为三阶方阵, $|A|=2$, 则 $\|A\| |A^*| =$ _____

5. 若 $\beta = [0, K, K^2]^T$ 能被 $\alpha_1 = [1+K, 1, 1]^T, \alpha_2 = [1, 1+K, 1]^T, \alpha_3 = [1, 1, 1+K]^T$ 唯一线性表示, 则 K _____

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共计 20 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在括号内)。

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f[f(x)] = (\quad)$

(A) $\begin{cases} 2+x, & x < -1; \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 1+x, & x < -1; \\ 1, & x \geq -1. \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 1, & x < -1; \\ 2+x, & x \geq -1. \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 1, & x < -1; \\ 1+x, & x \geq -1. \end{cases}$

7. 设 $F(x)$ 是 $\frac{\ln x}{x}$ 的一个原函数, 则 $dF(\sin x) = (\quad)$

(A) $\frac{\ln \sin x}{\sin x} dx;$

(B) $-\frac{\ln \sin x}{\sin x} \sin x dx;$

(C) $\frac{\ln \sin x}{\sin x} \cos x dx;$

(D) $-\frac{\ln \sin x}{\sin x} \cos x dx.$

8. $y'' - 6y' + 9y = 0$ 的通解为 $(\quad)$

(A) $c_1 e^{3x} + c_2;$

(B) $e^{3x}(c_1 + c_2 x);$

(C) $e^x(c_1 + c_2 x);$

(D) $e^x \cdot x(c_1 + c_2 x).$

9. 设 $Z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微, 则 $(\quad)$

(A) 在 (x_0, y_0) 处不必存在偏导数;

(B) 在 (x_0, y_0) 处偏导数必连续;

(C) 在 (x_0, y_0) 处偏导数不必连续;

(D) 在 (x_0, y_0) 处不必存在极限.

10. 设矩阵 $A_{n \times n}$ 的秩 $r < n$, 且 $AX = b$ 有解, 则其一定有 $(\quad)$

(A) $n-r$ 个线性无关的解;

(B) r 个线性无关的解;

(C) $n-r+2$ 个线性无关的解;

(D) $n-r+1$ 个线性无关的解.

三、计算题 (本题共 10 小题, 每小题 10 分, 共计 100 分)。

11. 设 $\begin{cases} x = g'(t) \\ y = tg'(t) - g(t) \end{cases}$ 其中 $g(t)$ 的二阶导数存在且 $g''(t) \neq 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

12. 求 $\int_{-2}^2 \max(x, x^2) dx$

13. 计算 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$

14. 求解初值问题

$$\begin{cases} (x - \sin y)dy - \tan y dx = 0 \\ y|_{x=0} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

15. 设 $Z = Z(x, y)$ 由方程 $Z^3 - 2xZ + y = 0$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$

16. 计算 $\iint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dx dz + (z - x + y) dx dy$, S : 曲面

$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 的外表面。

17. 求由 $(a, b, c > 0)$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x=0, y=0, z=0$ 所界均匀物体对原点的转动惯量。

18. 讨论 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}$$

有唯一解, 有无穷多解, 无解, 当有无穷多解时, 求出方程组的全体解。

19. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ad - bc \neq 0$, 求 A^{-1} , 若 $g(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 7$, 且 $g(A) = 0$, 问

$A + 5I$ 是否可逆? 若可逆, 试求其逆。

20. 设矩阵 A 与 B 相似, 其中 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$, 求 x 和 y 的

值。

四. 证明下列各题 (本题共 2 小题, 每题 5 分, 共计 10 分。)

21. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$, 证明存在 $\xi > 0$, 使

$$f'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{(1 + \xi^2)^2}.$$

22. 设 A 为 n 阶实对称矩阵, 且 $A^3 - 3A^2 + 5A - 3I = 0$, 证明 A 正定。