准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密封线内不要答题

華中科技大學

二〇〇三年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学、计算数学、概率统计

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

以下共 10 题，每题 15 分.

1. 求极限

$$l=\lim_{m,n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\sin\frac{1}{m}}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}}{1-\cos\frac{1}{m}}$$

2. 设 $u(x,y)$ 是二次连续可微函数，用极坐标代换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 变换式子 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$.

3. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)>0$，$g(x)$ 在 (a,b) 内可微且 $g'(x)\neq 0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$g'(\xi)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)g(\xi)\ln\frac{g(b)}{g(a)}.$$

4. 设 $a,b>0$，证明不等式：

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{(1-x)^2}\geqslant(a+b)^3.\ (0<x<1).$$

试卷编号：323

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上两次连续可微，$c=\dfrac{a+b}{2}$，

证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(c)+\frac{1}{2}\int_c^b (b-x)^2 f''(x)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^c (x-a)^2 f''(x)\mathrm{d}x.$$

6. 设 L 是椭圆 $4x^2+y^2=1$，$\boldsymbol{r}=\{x,y\}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\boldsymbol{\tau}$ 是 L 的单位切向量，指向反时针方向，求

$$I=\int_L r\sin(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s.$$

7. 设 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，$a,b,c>0$，$\rho$ 是原点到 Σ 的切平面的距离，求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S$.

8. 将函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n(2x-1)^n$ 展开为 x 的幂级数，并指明其收敛域.

9. 在$[-1,1]$上展开 $f(x)=|x|+\sin^2\pi x$ 为 Fourier 级数.

10. 证明公式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=2\sqrt{n}+C+\epsilon_n,$$

其中 C 是与 n 无关的常数，$\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$.