

数学(二)试卷

(科目代码:302)

注意事项:

1. 答题前,考生须在试卷密封线内填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须填(书)写在试卷上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束后,将试卷装入试题袋中。

得分	评卷人

一. 填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x =$ _____.

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 _____.

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$ _____.

(4) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3y} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 _____.

(6) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵,

E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

得 分	评卷人

(21) (本题满分 10 分)

设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

得分	评卷人

(22) (本题满分9分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0, \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

得分	评卷人

(23)(本题满分9分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 A 是否可相似对角化.

题号	一	二	三									总 分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

二. 选择题(本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.)

得 分	评卷人

(7) 把 $x \rightarrow 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt, \beta = \int_0^{x^2} \tan \sqrt{t} dt, \gamma = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3 dt$ 排列起来, 使排在后面的是前一个的高阶无穷小, 则正确的排列次序是

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β .
 (C) β, α, γ . (D) β, γ, α . 【 】

(8) 设 $f(x) = |x(1 - x)|$, 则

(A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
 (D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点. 【 】

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$. (B) $2 \int_1^2 \ln x dx$.
 (C) $2 \int_1^2 \ln (1 + x) dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2 (1 + x) dx$. 【 】

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$. 【 】

(11) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$.

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$.

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$.

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$. 【 】

(12) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于

(A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$.

(B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dx$.

(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr$.

(D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$. 【 】

(13) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得

C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 【 】

(14) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关. 【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

得 分	评卷人

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

kaoyan.com

得分	评卷人

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式;

(II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

得分	评卷人

(17) (本题满分 11 分)

人卷号	位 别

设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

- (I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;
 (II) 求 $f(x)$ 的值域.

得分	评卷人

(18)(本题满分12分)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0, x = t (t > 0)$ 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

得 分	评卷人

(19)(本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克,km/h 表示千米 / 小时.