

华中科技大学

二〇〇四年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数 学

适用专业: 物 理

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共计 20 分)。

1. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ a & , x = 0. \end{cases}$ 则 $a =$ _____。

2. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n-1}}$ 的第一类间断点为 _____。

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n \ln^2 n} x^{2n-1}$ 的收敛域为 _____。

4.
$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_4 \end{vmatrix} =$$
 _____。

($a_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$)

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, B 为三阶方阵, 且满足 $A^2 - AB = I$, 则

$r(AB - BA + A) =$ _____。

二、选择题（本题共5小题，每小题4分，共计20分，每小题给出的四个选项中只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在括号内）。

6. 设 $G(x)$ 是 $g(x)$ 在 (a, b) 上的一个原函数，则 $g(x) + G(x)$ 在 (a, b) 上[]。

(A) 为初等函数；

(B) 可导；

(C) 连续；

(D) 存在原函数

7. 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, 则当 $\Delta x < 0$ 时有[]。

(A) $\Delta y > dy > 0$;

(B) $\Delta y < dy < 0$;

(C) $dy > \Delta y > 0$;

(D) $dy < \Delta y < 0$

8. 设曲线积分 $\int \frac{-2xf(x)}{1+x^2} y dx + f(x) dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 连续且 $f(0) = 1$,

则 $f(x) = []$ 。

(A) $\frac{1}{1+x^2}$;

(B) $\frac{1}{x^2}$;

(C) $1+x^2$;

(D) x^2

9. n 阶方阵 A 与 B 相似的一个充分条件是[]。

(A) $\text{tr}A = \text{tr}B$;

(B) A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = 1, \dots, n$;

(C) $|\lambda I - A| = |\lambda I - B|$;

(D) $r(A) = r(B)$

10. A 是 $m \times n$ 矩阵 ($m \neq n$), $AX = 0$ 只有零解的充分必要条件是[]。

(A) $m > n$;

(B) $m < n$;

(C) A 的 n 个列向量线性无关;

(D) A 的 m 个行向量线性无关

三、计算题 (本题共 10 小题, 每小题 10 分, 共计 100 分)。

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arcsin x)}{\cot x}$

12. 设 $Z = f(\varphi(x) - y, x + \psi(y))$, 其中 f 具有二阶偏导数, φ 和 ψ 可微, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

13. 设 $f(x) = (x - a)^n \varphi(x)$, $\varphi(x)$ 在 a 的领域内有 $n - 1$ 阶连续导数, 求 $f^{(n)}(a)$

14. 一个月产 300 桶原油的油井, 在 3 年后将要枯竭, 预计从现在开始 t 个月后, 原油价格将是每桶 $p(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ (美元), 设油一生产出就被售出, 问: 从这口井可得到多少美元的收入?

15. 在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线, 使之与曲线以及 x 轴所围面积为 $\frac{1}{12}$, 求切点 A 的坐标及此切线方程。另对 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$, $y = 1$ 和 $x = 0$ 围成平面图形 D 绕 $x = 1$ 旋转而成的旋转体, 求其体积。

16. 求曲线积分

$$\oint_L y dx + z dy + x dz,$$

其中 L 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ 若从 x 轴的正向看去, 这圆周取逆时针方向。

17. 将函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 2 < x < 4 \end{cases}$, 在 $(0, 4)$ 上展开余弦级数。

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ 能否对角化? 若可对角化, 求 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。

19. 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 有 $A^*X = A^{-1} - 4X$, 求 X (A^* 为 A 的伴随矩阵).

20. 求 t , 使 $x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 正定.

四、证明题 (本题共 2 小题, 每小题 5 分, 共计 10 分).

21. 设 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx, (n=1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right) = 6\pi$.

22. 设 A 为 n 阶方阵, $A^T A = I, |A| < 0$, 证明: $|I + A| = 0$. 另若 $A^k = 0$, 问 $I - A$ 是否可逆? 何故?