绝密★启用前

2004年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

(科目代码:301)

注意事项:

1. 答题前,考生须在试卷密封线内填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须填(书)写在试卷上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束后,将试卷装入试题袋中。

得分	评卷人

一. 填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为______.

(2) 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$,且 $f(1)=0$,则 $f(x)=$ ______.

(3) 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分,则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为______.

(4) 欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0\ (x>0)$ 的通解为______.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,$\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵,则 $|\boldsymbol{B}|=$ ______.

(6) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布,则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$ ______.

考生编号______ 考生姓名______ 报考单位______

密封线内不要答题

得 分	评卷人

(21)(本题满分 9 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 A 是否可相似对角化.

得分	评卷人

(22)(本题满分 9 分)

设 A,B 为随机事件,且 $P(A)=\dfrac{1}{4}$,$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$,$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$,令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(Ⅱ)X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

得 分	评卷人

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x;\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,求:

(Ⅰ) β 的矩估计量;

(Ⅱ) β 的最大似然估计量.

题号	一	二	三									总 分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

得 分	评卷人

二. 选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　(B) α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D) β,γ,α.　【　】

(8) 设函数 $f(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$,则存在 $\delta>0$,使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.　【　】

(9) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数. 下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ,使得 $\lim_{n\to\infty}na_n=\lambda$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,则存在非零常数 λ,使得 $\lim_{n\to\infty}na_n=\lambda$.　【　】

(10) 设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则$F'(2)$等于

(A) $2f(2)$.　　(B) $f(2)$.　　(C) $-f(2)$.　　(D) 0.　　【　　】

(11) 设$\boldsymbol{A}$是3阶方阵，将$\boldsymbol{A}$的第1列与第2列交换得$\boldsymbol{B}$，再把$\boldsymbol{B}$的第2列加到第3列得$\boldsymbol{C}$，则满足$\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$的可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$为

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 【　　】

(12) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$的任意两个非零矩阵，则必有

(A) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关.　　【　　】

(13) 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若$P\{|X|<x\}=\alpha$，则x等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.　　【　　】

(14) 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布，且其方差为$\sigma^2>0$. 令$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\frac{\sigma^2}{n}$.　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\frac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-Y)=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.　　【　　】

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

得分	评卷人

（15）（本题满分 12 分）

设 $e < a < b < e^2$，证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

得 分	评卷人

(16)(本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬间,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机,着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为 $k = 6.0 \times 10^6$). 问从着陆点算起,飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克,km/h 表示千米 / 小时.

得 分	评卷人

(17)(本题满分 12 分)

计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} 2x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z^2 - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中Σ是曲面$z = 1 - x^2 - y^2 (z \geqslant 0)$的上侧.

得分	评卷人

(18)(本题满分 11 分)

设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$,其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_n,并证明当 $\alpha > 1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

得 分	评卷人

(19)(本题满分 12 分)

设 $z = z(x,y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数,求 $z = z(x,y)$ 的极值点和极值.

得 分	评卷人

(20)(本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0,\end{cases}\qquad (n\geqslant 2)$$

试问 a 取何值时,该方程组有非零解,并求出其通解.