

# 华中科技大学

## 二〇〇四年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数学分析

适用专业: 应用数学, 计算数学, 概率统计

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

以下每题 15 分

1. 设  $x_0 = 0, x_n = \sum_{k=1}^n a_k (n \geq 1), x_n \rightarrow b (n \rightarrow \infty)$ . 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_n + x_{n-1})$  之和.

2. 设  $f(0) = f(1), |f''(x)| \leq 2 (0 \leq x \leq 1)$ . 证明  $|f'(x)| \leq 1 (0 < x < 1)$ . 此估计能否改进?

3. 设  $f(x, y)$  有处处连续的二阶偏导数,  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = f(0, 0) = 0$ . 证明

$$f(x, y) = \int_0^1 (1-t)[x^2 f_{11}(tx, ty) + 2xy f_{12}(tx, ty) + y^2 f_{22}(tx, ty)] dt.$$

4. 设  $f(x, y)$  在  $x, y \geq 0$  上连续, 在  $x, y > 0$  内可微, 存在唯一点  $(x_0, y_0)$ , 使得  $x_0, y_0 > 0, f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ . 设  $f(x_0, y_0) > 0, f(x, 0) = f(0, y) = 0 (x, y \geq 0), \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ , 证明  $f(x_0, y_0)$  是  $f(x, y)$  在  $x, y \geq 0$  上的最大值.

5. 设处处有  $f''(x) > 0$ . 证明: 曲线  $y = f(x)$  位于其任一切线之上方, 且与切线有唯一公共点.

6. 求  $I = \int_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + 9y^2}$ ,  $L$  是取反时针方向的单位圆周.

7. 设  $f(\cdot)$  是连续正值函数,

$$F(t) = \frac{\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz}{\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} (x^2+y^2) f(x^2+y^2) dx dy}.$$

证明  $F(t) (t > 0)$  是严格单调减函数.

8. 设级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$  收敛, 证明

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

9. 设  $f(x)$  在  $[0, \infty)$  上连续, 其零点为  $x_n: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < \cdots, x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ . 证明: 积分  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  收敛  $\Leftrightarrow$  级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$  收敛.

10. 设  $a < b, f_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $\int_a^b f_n(x) dx \geq 0 (n = 1, 2, \cdots)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $f_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛于  $f(x)$ . 证明: 至少存在一点  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) \geq 0$ .