華中科技大學

二〇〇五年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

适用专业：应用数学　计算数学　概率论与数理统计

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

以下各题每题 15 分，共 150 分

1．解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$$

其中 a，b，c 为互不相同的数。

2．证明：任一 n 阶方阵可以表成一个数量矩阵（具有 kE 形式的矩阵）与一个迹为 0 的矩阵之和。

3．设 A 为 mxn 实矩阵，E 为 n 阶单位阵，$B=\lambda E+A^TA$，证明：当 $\lambda>0$ 时，B 为正定矩阵。

4．设 A 为 n 阶不可逆方阵，证明：A 的伴随矩阵 A^* 的 n 个特征值至少有 n-1 个为 0，且另一个非零特征值（如果存在）等于 $A_{11}+A_{22}+\cdots\cdots+A_{nn}$。

5．证明：相似的矩阵有相同的最小多项式。

6．设 A 为 mxn 矩阵，b 为 m 维列向量，证明 AX=b 有解的充分必要条件是对满足 $A^Tz=0$ 的 m 维列向量 z 也一定满足 $b^Tz=0$

7．证明：任一 n 阶实可逆阵 A 可以分解成一个正交阵 Q 与一个正定阵 S 之积，即 A=QS。

8．设 $M\in P^{n\times n}$，f(x)，g(x) $\in P[x]$，且（f（x），g（x））=1。令 A=f（M），B=g（M），W，W_1，W_2 分别为线性方程组 ABX=0，AX=0，BX=0 的解空间，证明 $W=W_1\oplus W_2$

准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密　封　线　内　不　要　答　题

试卷编号：401

9. 设Ω是一些n阶方阵组成的集合，其中元素满足$\forall A, B\in \Omega$，都有$AB\in\Omega$且$(AB)^3=BA$，证明

（1）交换律在Ω中成立。

（2）当$E\in\Omega$时，Ω中矩阵的行列式的值只可能为0，±1。

10. 证明：不存在n阶正交阵A，B，使得$A^2=AB+B^2$。