华中科技大学

二OO五招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数　学

适用专业：工　科（掌考）

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

密封线内不要写题

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1．$f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$的间断点及类型分别为________；

2．设 $f(x)$在 x_0 处可微，在 x_0 处自变量的改变量为Δx，函数的改变量为Δy，$k\neq 0$ 为常数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-f'(x_0)dx}{k\Delta x}=$______；

3．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛($a_n\geqslant 0$)，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ ______；

4．已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 $D(2X-1)=$ ______；

5．已知 n 阶方阵 A 满足 $A^2-2I=0$，则$(A+I)^{-1}=$________.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中只有一项符合题目要求，把所选项的字母填在括号内）。

6．设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则 $f(x)+F(x)$ 在(a,b)上（　）

(A) 连续；(B) 可微；(C) 存在原函数；(D) 为阶梯函数.

试卷编号：396

7．函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $P(1,2,-2)$ 的梯度为（　）

(A) $(\frac{2}{9},\frac{4}{9},-\frac{4}{9})$；(B) $(\frac{4}{9},\frac{2}{9},-\frac{4}{9})$；(C) $(-\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9})$；(D) $(\frac{2}{9},-\frac{4}{9},\frac{4}{9})$.

8．设 $z=x^{y^2}$，则结论正确的为（　）

(A) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}>0$；　(B) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}<0$；

(C) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\neq 0$；　(D) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$.

9．设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为总体 $X\sim E(\lambda)$ 的样本，λ 未知，则 λ 的极大似然估计为（　）

(A) $\frac{1}{\overline{X}}$；　(B) $\overline{X}$；　(C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$；　(D) $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

10．设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^TA=I$，$|A|<0$，则 $|A+I|=$（　）

(A) 2；　(B) 3；　(C) 1；　(D) 0.

三、计算题（本题共 10 小题，每小题 10 分，共计 100 分）

11．设 $u=z\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $du\big|_{(1,1,1)}$。

12．某银行的总存款量与银行付给储户利率的平方成正比，若银行以 20%的年利率把总存款的 90%贷出，问它给储户支付的年利率定为多少时，才能获得最大利润？

13．所有轴平行与 y 轴的抛物线构成一曲线族，求此曲线族满足的微分方程。

14．设 $b>0$，求 $\int_{-b}^{b}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\cos x]dx$。

15．计算 $\int_L e^x\cos y dy+e^x\sin y dx$，其中 L 是从点 $A(1,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到点 $B(-1,0)$ 的路径。

16．计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中 Ω 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=a\ (a>0)$ 围成的区域。

17．已知 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$ 可相似于对角矩阵，试确定 x，y 应满足的关系。

18．设 $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix}$，求 A^{100}，另设 $B=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$，求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}BQ$ 为对角阵。

19．随机抽取一批零件16件，测得长度（单位:cm）为

2.14　2.13　2.10　2.15　2.13　2.12　2.13　2.10

2.15　2.12　2.14　2.10　2.13　2.11　2.14　2.11

设长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且已知 $\sigma=0.01$cm，求 μ 的置信水平为 0.9 的区间估计（$u_{0.05}=1.6449$，$t_{0.05}(15)=1.7531$）。

20．将 n 个人的帽子混放，然后每人任取一顶帽子，以 X 记取到自己帽子的人数，求 EX 和 DX。

三、证明题（本题共2小题，每小题5分，共计10分）

21．叙述拉格朗日中值定理，另设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足关系式：$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$，证明：在 $(0,1)$ 内至少有一个 ξ，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

22．设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，判断下面命题是否成立：

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n-1}x_{n-1}=a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n-1}x_{n-1}=a_{2n} \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn-1}x_{n-1}=a_{nn} \end{cases}$ 无解的充分必要条件是 A 可逆。

若成立给出证明，若不成立给出反例。