绝密★启用前

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试卷

（科目代码:303）

注意事项:

1. 答题前,考生须在试卷密封线内填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须填(书)写在试卷上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束后,将试卷装入试题袋中。

得 分	评卷人

一. 填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ________.

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为________.

(3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$,则 $dz\big|_{(1,0)} =$ ________.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a \neq 1$,则

$a =$ ________.

(5) 从数 1,2,3,4 中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则

$P\{Y=2\} =$ ________.

(6) 设二维随机变量(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则 $a =$ ________, $b =$ ________.

得 分	评卷人

（21）（本题满分 13 分）

设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^{T} & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A，B 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m \times n$ 矩阵.

（Ⅰ）计算 $P^{T}DP$，其中 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$；

（Ⅱ）利用（Ⅰ）的结果判断矩阵 $B - C^{T}A^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

得 分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$;

(Ⅲ)$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

得分	评卷人

(23)(本题满分13分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其样本均值为 $\overline{X}$. 记 $Y_i=X_i-\overline{X},i=1,2,\cdots,n$.

(Ⅰ)求 Y_i 的方差 $DY_i,i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ)求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$;

(Ⅲ)若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量,求常数 c.

密 封 线 内 不 要 答 题

题号	一	二	三									总　分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

得 分	评卷人

二. 选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8. 【　　】

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\,d\sigma$, $I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\,d\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则

(A) $I_3>I_2>I_1$.　　(B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$.　　(D) $I_3>I_1>I_2$. 【　　】

(9) 设 $a_n>0, n=1,2,\cdots$,若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛,则下列结论正确的是

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛. 【　　】

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是

(A) $f(0)$ 是极大值,$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.　　(B) $f(0)$ 是极小值,$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

(C) $f(0)$ 是极大值,$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值.　　(D) $f(0)$ 是极小值,$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

【　　】

(11) 以下四个命题中，正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界. 【　　】

(12) 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵.

若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(B) 3.

(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\sqrt{3}$. 【　　】

(13) 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，

则 $\alpha_1, A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1=0$.　　(B) $\lambda_2=0$.

(C) $\lambda_1\neq0$.　　(D) $\lambda_2\neq0$. 【　　】

(14) 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知. 现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\bar{x}=20(\mathrm{cm})$，样本标准差 $s=1(\mathrm{cm})$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是

(A) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$.

(B) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16))$.

(C) $(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$.

(D) $(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15))$.

【　　】

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

得分	评卷人

(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

密 封 线 内 不 要 答 题

得分	评卷人

(16)(本题满分8分)

设$f(u)$具有二阶连续导数,且$g(x,y)=f(\frac{y}{x})+yf(\frac{x}{y})$,求$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

（17）（本题满分 9 分）

计算二重积分$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$．

得 分	评卷人

(18)(本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

得 分	评卷人

(19)(本题满分 8 分)

设$f(x)$, $g(x)$ 在$[0,1]$上的导数连续,且$f(0)=0$, $f'(x)\geqslant 0$, $g'(x)\geqslant 0$. 证明:对任何$a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

(20)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$(\text{i})\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases}$$

和

$$(\text{ii})\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$$

同解,求 a, b, c 的值.

报考单位______ 考生姓名______ 考生编号______

密 封 线 内 不 要 答 题