绝密★启用前

2005年全国硕士研究生入学统一考试

数学（四）试卷

（科目代码:304）

注意事项:

1. 答题前,考生须在试卷密封线内填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2. 答案必须填(书)写在试卷上,写在其他地方无效。
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4. 考试结束后,将试卷装入试题袋中。

得 分	评卷人

一. 填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1} =$ ______.

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为______.

(3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$,则 $dz|_{(1,0)} =$ ______.

(4) 设行向量组 $(2,1,1,1),(2,1,a,a),(3,2,1,a),(4,3,2,1)$ 线性相关,且 $a \neq 1$,则 $a =$ ______.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为三维列向量,记三阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\ \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3).$$

如果 $|\boldsymbol{A}| = 1$,那么 $|\boldsymbol{B}| =$ ______.

(6) 从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X,再从 $1,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y,则 $P\{Y=2\} =$ ______.

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

(21)(本题满分 13 分)

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3.$$

(Ⅰ) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

(Ⅱ) 求矩阵 A 的特征值；

(Ⅲ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

得 分	评卷人

(22)(本题满分 13 分)

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求:(Ⅰ)(X,Y)的边缘概率密度$f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(Ⅱ)$Z=2X-Y$的概率密度$f_Z(z)$;

(Ⅲ)$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

得分	评卷人

(23)(本题满分13分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从 $N(0,1)$，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, Y_i=X_i-\overline{X}, i=1,2,\cdots,n$. 求：

(Ⅰ) Y_i 的方差 $DY_i, i=1,2,\cdots,n$;

(Ⅱ) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$;

(Ⅲ) $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$.

密 封 线 内 不 要 答 题

题号	一	二	三									总分
			15	16	17	18	19	20	21	22	23	
得分												
评卷人												

得分	评卷人

二. 选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 当 a 取下列哪个值时,函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰有两个不同的零点.

(A) 2.　　(B) 4.　　(C) 6.　　(D) 8.　【　　】

(8) 设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$, $I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,则

(A) $I_3>I_2>I_1$.　　(B) $I_1>I_2>I_3$.

(C) $I_2>I_1>I_3$.　　(D) $I_3>I_1>I_2$.　【　　】

(9) 下列结论中正确的是

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都收敛.

(B) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都发散.

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散, $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛.

(D) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛, $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散.　【　　】

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$,下列命题中正确的是

(A) $f(0)$ 是极大值,$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值. (B) $f(0)$ 是极小值,$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

(C) $f(0)$ 是极大值,$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值. (D) $f(0)$ 是极小值,$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

[ ]

(11) 以下四个命题中,正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界,则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界. [ ]

(12) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{CA}$,则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 为

(A) $\boldsymbol{E}$. (B) $-\boldsymbol{E}$. (C) $\boldsymbol{A}$. (D) $-\boldsymbol{A}$.

[ ]

(13) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立,则

(A) $a=0.2,\ b=0.3$. (B) $a=0.1,\ b=0.4$.

(C) $a=0.3,\ b=0.2$. (D) $a=0.4,\ b=0.1$. [ ]

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布的随机变量列,且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布,记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$. (B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$. (D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

[ ]

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

得 分	评卷人

(15)(本题满分 8 分)

求 $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

(17)(本题满分9分)

计算二重积分$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

得 分	评卷人

(18)(本题满分 9 分)

求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

得 分	评卷人

(19)(本题满分 8 分)

设$f(x)$, $g(x)$ 在$[0,1]$上的导数连续,且$f(0)=0$, $f'(x)\geqslant 0$, $g'(x)\geqslant 0$. 证明:对任何$a\in[0,1]$,有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

密 封 线 内 不 要 答 题

得 分	评卷人

(20)(本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$(\text{i})\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0, \end{cases}$$

和

$$(\text{ii})\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0, \end{cases}$$

同解,求 a, b, c 的值.

密 封 线 内 不 要 答 题