华中科技大学

二OO五招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数　学

适用专业：文　科（单考）

(除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回)

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\cot x}=$______；

2. $\int e^{x^2+\ln x}dx=$__________；

3. 设 A 为 n 阶非零方阵，$AX=0$ 有非零解，A^*为 A 的伴随矩阵，则 $r(A^*)=$______；

4. 设 A 为 3 阶方阵，其特征值为 1,2,3，则 $|A^{-1}|=$_____；

5. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$，则 $(AB)^{-1}=$_____.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中只有一项符合题目要求，把所选项的字母填在括号内）。

6. 设 $f(x)=x^3\sin x^3 e^{\cos x}$，则 $f(x)$是（　）

(A) 有界函数；　(B) 单调函数；　(C) 周期函数；　(D) 偶函数.

7. 满足方程 $\int_0^1 f(tx)dt=nf(x)$（n 为自然数）的函数 $f(x)$为（　）

(A) $Cx^{\frac{1-n}{n}}$；　(B) C；　(C) $C\sin nx$；　(D) 以上均不对.

试卷编号：397

8．设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则必有（　　）

(A) $|A+B|=|A|+|B|$；　　(B) $AB=BA$；

(C) $|AB|=|BA|$；　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

9．设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零方阵，满足 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & t\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$，则（　　）

(A) $t=-3$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$；　　(B) $t=-3$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$；

(C) $t\neq-3$ 时，$r(\boldsymbol{P})=1$；　　(D) $t\neq-3$ 时，$r(\boldsymbol{P})=2$.

10．设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，则（　　）

(A) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$；　　(B) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；　　(C) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{D}$；　　(D) $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$.

三、计算题（本题共 10 小题，每小题 10 分，共计 100 分）

11．设 $xy^2+e^y=\cos(x+y^2)$，求 y'。

12．由观察数据显示，1970 年至 1990 年世界石油消耗率呈指数增长，设 $R(t)$ 表示从 1970 年起第 t 年的石油消耗率，可得 $R(t)=161e^{0.07t}$（亿桶）。试由此求出从 1970 年到 1990 年世界石油消耗的总量。

13．设 $f(x)$ 可导，且满足 $\int_1^x \frac{1}{t}f(t)dt=x^2+f(x)$，求 $f(x)$。

14．求 $\int_0^3 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$。

15．某商品的成本是每件 c 元，当每件售价是 x 元时，可售出的件数为 $n=\frac{a}{x-c}+b(100-x)$，其中 a，b 均为正常数。问售价 x 为多少元时可使其获得最大利润？

16．设有方程组（Ⅰ）$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$；（Ⅱ）$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$，求出它们所有的公共解。

17．设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^2-2I=0$，求 $(A-I)^{-1}$。

18．设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$，求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

19．设有向量组 $\alpha_1=[2,1,4,3]^T$，$\alpha_2=[-1,1,-6,6]^T$，$\alpha_3=[-1,-2,2,-9]^T$，$\alpha_4=[1,1,-2,7]^T$，$\alpha_5=[2,4,4,9]^T$，求该向量组的秩及一个极大线性无关组，并把其余向量用这个极大线性无关组线性表示。

20．设 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, b_i \neq 0,\ i=1,2,\cdots,n$。求 $r(A)$。

三、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，共计 10 分）

21．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$。

22．证明反对称矩阵的逆也为反对称矩阵。另证明一个 n 阶反对称矩阵若有逆，则 n 必为偶数，但反之不然。