

华中科技大学

二〇〇五年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数 学

适用专业: 物 理 系 各 专 业

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

一、单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 4 分, 共计 16 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 以下无穷小量中与 x^2 同阶的无穷小量是 ()

(A) $\ln \cos x$ (B) $x + x^2$ (C) $(1-x)^2 - 1$ (D) $\ln(1 + \sin x)^2$

2. 微分方程 $y'' + y' = e^x + 1$ 的一个特解的待定形式为 ()

(A) $y^* = C_1 + C_2 e^x$ (B) $y^* = C_1 x + C_2 x e^x$

(C) $y^* = C_1 x + C_2 e^x$ (D) $y^* = C_1 + C_2 x e^x$

3. 如果 $f'(x) = 4 \cos 2x$, 则成为 $f(x)$ 的一个原函数的是 ()

(A) $2 \cos 2x$ (B) $2 \sin 2x$ (C) $x - \sin 2x$ (D) $x - \cos 2x$

4. 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ 。则三条直线 $a_i x + b_i y + c_i = 0$

$(a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3)$ 交于一点的充分必要条件是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

(C) $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = r(\alpha_1, \alpha_2)$ (D) α_1, α_2 线性无关且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 4 分, 共计 24 分, 将计算结果化简后写入横线上。)

5. 行列式 $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 5x \end{vmatrix}$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

6. 若二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 为正定二次型, 则参数 t 的取值范围为_____.

7. 曲线 $y = x \ln(e + \frac{1}{x})$ ($x > 0$) 的斜渐近线方程为_____.

8. 逐次积分 $I = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ 在更换积分次序后的形式为

$I =$ _____.

9. 设 $u = xy - z^2$, 则 u 在点 $(2, -1, 1)$ 处方向导数的最大值是_____.

10. 微分方程 $x^2 y'' + xy' - y = 0$ 的通解为_____.

三、计算题 (本题共 10 小题, 每小题 10 分, 共计 100 分. 必须写出关键的解答过程)

11. 设变量 x, y, z 满足方程 $z = f(x, y)$ 以及 $F(x, y, z) = 0$ (其中 f, F 均可微), 求 $\frac{dz}{dx}$.

12. 在椭球面 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 的第一卦限部分上求一点 M , 使得椭球面在该点的切平面在三个坐标面上的截距的平方和最小。

13. 平面 Oxy 上由 y 轴, 直线 $y = H$ ($H > 0$) 和抛物线 $y = \frac{H}{R^2} x^2$ ($0 \leq x \leq R$) 所围成的平面图形 D 绕 Oy 轴旋转, 使用积分方法计算所构成的旋转体的体积 V 。

14. 一条质量均匀, 密度为 μ 的链条挂在垂直墙壁的钉子上, 启动时一端离钉子 $8m$, 另一端离钉子 $12m$ 。若不计算钉子对链条的摩擦力, 取 $g = 10m/s^2$, 求链条滑过钉子所需要的时间。

15. 计算 $I = \int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$, 其中 L 是逆时针指向的封闭圆周 $x^2 + y^2 = 1$

16. 设曲面 S 是球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 的上侧 ($z \geq 1$) 和圆锥面 $S_2: x^2 + y^2 = z$ 的下侧 ($0 \leq z \leq 1$) 共同组成, 计算 $I = \iint_S xdzdx + z^2 dxdy$

17. 将函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ 在区间 $[0, \pi]$ 上展开为正弦级数。

18. 讨论矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 是否可以相似于一个对角矩阵? 为什么? 如果可以的话, 求出其相似对角矩阵。

19. 设 $A = (a_{ij})$ 为 3 阶实矩阵, 且适合 $a_{11} \neq 0$ 及 $a_{ij} = A_j$ ($1 \leq i, j \leq 3$), 其中 A_j 是元素 a_{ij} 的代数余子式, 计算矩阵 A 的行列式 $|A|$ 。

20. a, b 为何值时, 方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 有解或无解? 在有解时求出相应的解。

四、证明题 (本题共 2 小题, 每小题 5 分, 共计 10 分)

21. 设 $A, A - I$ 都是 n 阶正定矩阵, 其中 I 为单位矩阵, 证明 $I - A^{-1}$ 为正定矩阵。

22. 设函数 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的非负的单调增函数, $b = f(b) > 0$, $0 \leq x_0 \leq b$,

$x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。