華中科技大学

二〇〇五年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

适用专业：基础数学，应用数学，计算数学，概率统计

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密 封 线 内 不 要 答 题

共 10 题，每题 15 分.

1. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=1$，$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，求极限

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{A_n}-\mathrm{e}^{A_{n-1}}}{A_n^{\mathrm{e}}-A_{n-1}^{\mathrm{e}}}.$$

2. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上有二阶连续导数，$f(0)=f(1)=0$，$|f'(x)|\leqslant 8/5$，$|f''(x)|\leqslant 8/5$，给出 $|f(x)|$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的一个估计.

3. 设 $\varphi(x,y)$ 有连续的一阶偏导数 $\varphi_1(x,y)$ 与 $\varphi_2(x,y)$，$f(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}u\int_0^y\varphi(u,v)\mathrm{d}v$，证明：

$$f(x,y)=\int_0^1(1-t)\Big[\int_0^{ty}x^2\varphi_1(tx,v)\mathrm{d}v+\int_0^{tx}y^2\varphi_2(u,ty)\mathrm{d}u+2xy\varphi(tx,ty)\Big]\mathrm{d}t.$$

试卷编号：310

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上可微且恒大于零，$f(0)=1$，$f'(x)/f(x)$ 单调减. 证明：$f(x+y)\leqslant f(x)f(y)(x,y\geqslant 0)$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，$f(a)=f'(a)=0$，证明

$$\int_a^b (b-x)^3 f''(x)\,\mathrm{d}x = 6\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x f(y)\,\mathrm{d}y.$$

6. 设 $r>1$ 为常数，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛，$b_n = a_{z}$，求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛域.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有连续的一阶导数. a_n, b_n 是 $f(x)$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数. 证明：存在常数 $M>0$，使得 $|a_n|\leqslant M/n$，$|b_n|\leqslant M/n(n\geqslant 1)$.

8. 设 $Q(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，积分 $\int_L 3x^2y\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 完全决定于 L 的起点与终点，且对任何实数 z 成立等式

$$\int_{(0,0)}^{(z,1)} 3x^2y\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,z)} 3x^2y\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,$$

求函数 $Q(x,y)$.

9. 设 Σ 记球面 $x^2+y^2+z^2=1$，A 是 Σ 内部一点，它与原点的距离为 q，$0<q<1$；ρ 记点 A 与 Σ 上的点之间的距离，求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\rho^2}$.

10. 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$；每个 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上均有零点. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一个零点.