

# 华中科技大学

## 二〇〇六年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目: 数 学

适用专业: 理 工 科

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

### 一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共计 20 分)

1. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 4, \\ e^x, & x > 4, \end{cases}$   $\varphi(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$  则  $\varphi'(f(5)) =$  \_\_\_\_\_;

2. 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$  的敛散性为 \_\_\_\_\_;

3. 若  $f(x)$  在  $x_0$  的某一个邻域内有直至  $n-1$  阶的导数, 则  $f(x)$  关于该点及其邻域的泰勒公式的皮亚诺余项为 \_\_\_\_\_;

4. 设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为取自正态总体  $N(1, 1)$  的样本,  $\bar{X}$  为其样本均值, 则  $\frac{\bar{X}-1}{EX_1/\sqrt{n}}$  \_\_\_\_\_;

5. 设  $A$  为  $n$  阶方阵,  $r(A)=n-1$ , 则矩阵方程  $AX=0$  的一个非零解  $X=$  \_\_\_\_\_.

### 二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 4 分, 共计 20 分。每小题给出的四个选项中只有一项符合题目要求, 把所选项的字母填在括号内)。

6. 设  $f(x)$  为连续的奇函数,  $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ , 则  $F'(x)$  为 ( )

(A) 奇函数; (B) 偶函数; (C) 非奇非偶函数; (D) 单调函数.

7. 微分方程  $y^{(4)} - y = e^x + 3\sin x$  的特解形式为 ( )

(A)  $Ae^x + B\sin x$ ; (B)  $Ae^x + B\cos x + C\sin x$ ;  
(C)  $Axe^x + B\cos x + C\sin x$ ; (D)  $x(Ae^x + B\cos x + C\sin x)$ .

试卷编号: 396

共 3 页  
第 1 页

8. 若函数  $f(x)$  在区间  $I$  上存在极值点, 则极值点必为 ( )

(A) 驻点; (B) 边界点; (C) 内点; (D) 最值点.

9. 对于正态总体  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $\sigma^2$  的极大似然估计与矩估计 ( )

(A) 不同; (B) 相同; (C)  $\mu$  未知时不同; (D) 仅当  $\mu = 0$  时相同.

10. 下面矩阵中与  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  相似的矩阵为 ( )

(A)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (B)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (C)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ; (D)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

### 三、计算题 (本题共 10 小题, 每小题 10 分, 共计 100 分)

11. 设  $z = u^2 v^3$ ,  $u = e^{2x} \sin y$ ,  $v = x^2 + y^2$ , 求  $\frac{\partial v}{\partial x}$  及  $dz$ .

12. 设生产  $x$  件产品的成本为  $C(x) = 10 + \sqrt{1+x^2}$  (元). 每件产品售价为 5 元, 销售  $x$  件的收入为  $R(x) = 5x$ . 设出售  $x+1$  件产品比出售  $x$  件产品产生的利润增长额为  $I(x)$ . (1) 写出  $I(x)$  的表达式; (2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$

13. 设某隧道汽车流量 (辆/秒) 与平均车速  $v$  (km/h) 有如下函数关系:

$$f(v) = \frac{35v}{1.6v + (v^2/22) + 31.1}$$

求 (1) 平均车速为多少时, 车流量最大? (2) 最大车流量为多少?

14. 计算  $\int_{-1}^1 [\sin(\ln(x + \sqrt{1+x^2})) + |x|] dx$ .

15. (1) 叙述奥高公式;

(2) 计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} (8y+1)x dydz + 2(1-y^2) dzdx - 4yz dx dy$ , 其中  $\Sigma$  是由曲线

$\begin{cases} z = \sqrt{y-1} \\ x = 0 \end{cases} (1 \leq y \leq 3)$  绕  $y$  轴旋转一周所成的曲面, 它的法矢量与  $y$  轴正向的夹角

恒大于  $\pi/2$ .

16. (1) 写出平面方程的一般表达式;

(2) 求过直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$  且垂直于平面  $3x+2y-z-5=0$  的平面方程.

17. (1) 给出矩阵  $A$  可逆的一个充分必要条件;

(2) 设  $n$  阶方阵  $A, B$  满足  $AB+B^2+A+B+2I=0$ , 问  $A+B$  是否可逆, 若可逆, 求其逆.

18. (1) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$  为正定的, 求  $t$  应该满足的条件;

(2) 设  $n$  阶方阵  $A = \begin{bmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{bmatrix}$ , 求  $A$  的一个特征值及其对应的特征向量.

19. 从一批灯泡中随机地抽取 10 只, 测得它们的寿命 (单位: 小时) 为

1067, 919, 1196, 785, 1126, 936, 918, 1156, 920, 948,

设灯泡的寿命服从正态分布, 试用极大似然法估计灯泡能使用 1300 小时以上的概率 ( $\Phi(2.427)=0.9925$ ,  $\Phi(1.964)=0.975$ ).

20. 设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障则全天停止工作, 若一周 5 个工作日里无故障, 可获利润 10 万元; 发生一次故障可获利润 5 万元; 发生二次故障所获利润 0 元; 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元, 求一周内期望利润是多少?

#### 四、证明题 (本题共 2 小题, 每小题 5 分, 共计 10 分)

21. 若  $f(x)$  在  $[0,1]$  上有三阶导数,  $f(0)=f(1)=0$ , 设  $F(x)=x^3f(x)$ , 证明在  $(0,1)$  内至少存在一个  $\xi$ , 使  $F'''(\xi)=0$ .

22. 若  $A^2=A$ , 则称  $A$  为幂等矩阵. 设  $A$  为  $n$  阶幂等矩阵且  $A \neq I$  ( $I$  为单位矩阵), 证明:  $|A|=0$ .