華中科技大學

二〇〇六年招收硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

适用专业：基础数学、应用数学、计算数学、概率统计

（除画图题外，所有答案都必须写在答题纸上，写在试题上及草稿纸上无效，考完后试题随答题纸交回）

准考证号码：

报考学科、专业：

姓名：

密封线内不要答题

1. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续可微函数，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 有水平切线，$a>0$，求 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{a}{n}\right)\right]^n$.（15 分）

2. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的正值连续函数. 证明方程

$$\frac{1}{f(x)}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{f(1-x)}\int_0^{1-x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

在区间 $(0,1)$ 内至少有一解.（15 分）

3. 设 Σ 是由方程 $F(x_1,x_2,x_3)=0$ 表示的曲面，其中 $F(x_1,x_2,x_3)$ 是连续可微函数；$B(b_1,b_2,b_3)$ 是曲面 Σ 外一点，$A(a_1,a_2,a_3)$ 是 Σ 上距离 B 最近的点. 求曲面 Σ 在点 A 处的切平面方程.（15 分）

4. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的两次可微函数，$f(x)\geqslant 0$，$f''(x)\geqslant 0\,(a\leqslant x\leqslant b)$，$S_1$ 是曲边梯形 $0\leqslant y\leqslant f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 的面积，S_2 是以点 $(a,0)$，$(a,f(a))$，$(b,f(b))$，$(b,0)$ 为顶点的梯形的面积. 比较 S_1 与 S_2 的大小，给出结论的分析证明.（15 分）

试卷编号：310

5. 求 $I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+xy+y^2}$，$L$ 是取逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=1$.（15 分）

6. 设 $f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的正值连续函数，

$$\varphi(t)=\iint\limits_{z=x^2+y^2\leqslant t^2} f(z)\mathrm{d}S \Big/ \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明：$\varphi(t)$ 是区间 $(0,\infty)$ 上严格单调增加的连续函数.（15 分）

7. 设 V 是不含原点的有界闭区域，其体积为 v，其边界为光滑的简单闭曲面 Σ，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的外向单位法向量，$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$；$f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续可微函数，它满足微分方程 $tf'(t)+2f(t)-t=0$. 求

$$I=\iint\limits_{\Sigma} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

（15 分）

8. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=1$ 有定义，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ 发散.

(i) 已知极限 $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|2a_n|}$ 存在，求 l.

(ii) 证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致收敛.（15 分）

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx$ 是 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的正弦级数，求 $B_n(n\geqslant 1)$.（15 分）

10. 设对每个自然数 n，$f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且至少有一零点，当 $n\to\infty$ 时 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$. 证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有一零点.（15 分）

试卷编号： 310