

二 00 七年招收硕士研究生

入学考试自命题试题

考试科目: 数学(含高等数学线性代数)

适用专业: 物理系各专业

(除画图题外,所有答案都必须写在答题纸上,写在试题纸上及草稿纸上无效,考完后试题随答题纸交回)

一、单项选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共计 20 分)

1. 设函数 $f(x-2)=x^2-1$, $g(f(x))=\frac{1+x}{1-x}$, 则 $g(3)=$ ()

(A) -3

(B) 1

(C) 0

(D) -2

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 但是 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. 则 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散;

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛;

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛.

3. 与空间曲线 $C: \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 所对应的点的切矢量

垂直的矢量是 ()

(A) $\{1,1,-1\}$

(B) $\{1,1,1\}$

(C) $\{1,-1,1\}$

(D) $\{3,2,1\}$.

4. 设非零矩阵 A 为 n 阶方阵, 其秩 $r(A) < n$, 则以下选项中不正确的是 ()

(A) 行列式 $|A|=0$;

(B) 方程组 $A^*X=0$ 有非零解;

(C) 伴随矩阵 A^* 的秩是 $n-r(A)$;

(D) 伴随矩阵 A^* 的秩或者是 0, 或者是 1.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共计 30 分)

5. 设向量组 α, β, γ 线性无关, 向量组 $\alpha+2\beta, 2\beta+k\gamma, 3\gamma+\alpha$ 线性相关, 则 $k=$ _____。

6. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量, $\lambda=2$ 是

二重特征值, 则参数 a 和 b 分别等于_____。

7. 函数极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} ((2+x)e^{1/x} - x) =$ _____。

8. 设 $f(x,y) = x^3y + \frac{\sin \pi y}{x^2 + y^2}$, 则偏导数 $f'_x(2,1) =$ _____。

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n} x^{2n}, |x| < 1$ 的和函数 $S(x) =$ _____.

10. 设椭圆 $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的长为 a , 则

$$\int_L (3x^2 + 2xy + 4y^2) ds = \text{_____}.$$

三、(以下共 10 小题, 每小题 10 分, 共计 100 分。必须写出关键的解答过程)

11. 研究数列 $x_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$ 的敛散性。

12. 判定数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ 的敛散性。

13. 设参变量函数为 $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

14. 求微分方程 $\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 的解.

15. 设有质量为 m 的非均匀球体 $T: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, 其上任意一点 $M(x, y, z)$ 的密度与该点到球心的距离成正比, 计算球体关于其直径的转动惯量。

16. 假设地球赤道是一个圆周, 对于该圆周上的点的连续函数, 例如温度函数, 证明: 在这个赤道圆内必有一条直径, 它的两个端点的温度相同。

17. 计算线积分 $I = \int_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$,

其中 L 为曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$, 从 z 轴正向看, L 的方向取逆时针方向。

18. 4 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 4E$, E 为单位矩阵. 已知 $|A| < 0$, 求矩阵 A 的伴随矩阵的一个正的特征值。

19. 若二次型 $x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$ 为正定的, 求 t 。

20. 已知方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 中的列向量 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$ 。如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求解线性方程组 $AX = \beta$ 。