

二〇〇七年招收硕士研究生

入学考试自命题试题

考试科目: 数学(文经类)(单考)

适用专业: _____

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题纸上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

一、填空题(本题共5小题, 每小题4分, 共计20分)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛区间为 _____;

2. 曲线 $y = \frac{\sin x}{x-1}$ 的渐近线为 _____;

3. 设 $a > 1/e$, 方程 $\ln x = ax$ ($a > 0$) 的实根数为 _____;

4. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r , 且 b_1, b_2, \dots, b_m 不全为零, 若矩阵 B 满足

$$AB = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_m & b_m & \cdots & b_m \end{bmatrix}, \text{ 则 } r(B) \leq \underline{\hspace{2cm}};$$

5. 设 A 为实对称矩阵, 且 $A^2 = O$, 则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中只有一项符合题目要求，把所选项的字母填在括号内）。

6. 设 $f(x) > 0$ ，并在区间 $[0, 1]$ 上连续且单调递增，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n \left(f, \frac{i}{n}\right)^n} \frac{1}{n} = (\quad)$

(A) $f(1)$; (B) $f(0)$; (C) 0; (D) 1.

7. $f(x) = x|x|$ 的不可导点为 ()

(A) $x=1$; (B) $x=0$; (C) $x=1, x=0$; (D) 无不可导点.

8. 可逆的反对称矩阵的逆矩阵是 ()

(A) 对称矩阵; (B) 反对称矩阵; (C) 正交矩阵; (D) 幂等矩阵.

9. 设 $A = [a_{ij}]_{n \times n} \neq O$ ，且 $a_{ij} = A_{ij}$ ，(A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式) 则 $|A|$ ()

(A) 小于 0; (B) 等于 0; (C) 大于 0; (D) 等于 1.

10. 若 A 只有零特征值，则 ()

(A) A 必为零; (B) A 必不为零; (C) $|A|$ 不必为零; (D) A 不必为零.

三、计算题（本题共 10 小题，每小题 10 分，共计 100 分）

11. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有二阶连续导数，且 $f(0)=0$ ，设

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(0), & x = 0, \\ \frac{e^x}{x} f(x), & x \neq 0, \end{cases}$$

求 $\varphi'(x)$.

12. 求曲线 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

13. 要求设计一张单栏的竖向张贴的海报，它的印刷面积为 128 平方分米，上下空白各 2 分米，两边空白各 1 分米，如何确定海报尺寸可使四周空白面积最小？

14. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\int x f'(x) dx$.

15. 求解初值问题 $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases}$

16. 设 A 为 n 阶方阵, $r(A) = n-1$, 求 $AX=0$ 的通解.

17. 叙述正交矩阵的定义. 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 问 A 能否对角化, 若 A

可对角化, 求正交矩阵 T , 使 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

18. 设 4 阶矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, A 满足 $A(I - C^{-1}B)^T C^T = I$,

求 A .

19. 计算行列式: $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$. 其中 $a_i \neq 0, i=1, 2, \dots, n$.

20. 设一组互不相等的非零实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$, 求

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$ 的秩.

