

二〇〇七年招收硕士研究生

入学考试自命题试题

考试科目: 数学分析适用专业: 基础数学, 应用数学, 计算数学, 概率统计

(除画图题外, 所有答案都必须写在答题纸上, 写在试题纸上及草稿纸上无效, 考完后试题随答题纸交回)

1. 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$). 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限. (15 分)

2. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}$. (15 分)

3. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足: (1) 对每个 $n \geq 1$, $u_n(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 上一致连续; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 上一致收敛于 $S(x)$. 证明 $S(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 上一致连续. (15 分)

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上二阶可导且满足 $|f''(x)| \leq 1$ ($0 \leq x \leq 1$), 又设 $f(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 内取到极值 $\frac{1}{4}$. 证明

$$|f(0)| + |f(1)| \leq 1. \quad (15 \text{ 分})$$

5. 证明函数 $F(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^y} dx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续. (15 分)

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 内二阶可导并且满足: $f''(0) > 0$ 和

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

令 $a_n = f(\frac{1}{n})$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域. (15 分)

7. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 Σ 为椭球面

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \text{ 方向取为外侧. (15 分)}$$

8. 设 D 为由两条直线 $y = x$, $y = 4x$ 和两条双曲线 $xy = 1$, $xy = 4$ 在第一象限所围成的区域; $F(u)$ 是具有连续导数的一元函数, 记 $f(u) = F'(u)$. 证明

$$\int_{\partial D} \frac{F(xy)}{y} dy = \ln 2 \int_1^4 f(u) du.$$

其中 ∂D 是区域 D 的边界, 方向为逆时针方向. (15 分)

9. 将函数 $f(x) = x$ ($x \in [0, \pi]$) 展开为余弦级数并求出其和函数. (15 分)

10. 设 $F(x, y) = 0$ 为平面光滑曲线 Γ 的方程, 即 $F(x, y)$ 具有连续的一阶偏导数且 $[F_x(x, y)]^2 + [F_y(x, y)]^2 \neq 0$; 又设 (x_0, y_0) 是该曲线外一点、 (x_1, y_1) 是该曲线上到 (x_0, y_0) 最近的一点. 求曲线 Γ 在 (x_1, y_1) 处的法线方程. (15 分)