华中科技大学08硕士研究生考试数学分析试题

1 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$ （15）

2 设 $f(x)$ 连续，$g(x)$ 可导，且 $g'(x)-f(x)=1-6x$ 与 $g(x)+\int_1^x f(t)dt=2+x-x^2$.求 $f(x)$ 和 $g(x)$.（15）

3 证明 $(3x^2y+8xy^2)dx+(x^3+8x^2y+12ye^y)dy$ 为某个函数的全微分,并求它的原函数.（15）

4 设 $f(t)$ 为连续函数,证明（15）

$$\int_a^b dy\int_a^y (y-x)^n f(x)dx=\frac{1}{n+1}\int_a^b (b-x)^{n+1} f(x)dx$$

5 讨论函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的连续性与可导性。（15）

6 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数的存在性与可微性。（15）

7 设反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明 $\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$ 收敛。

8 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足函数方程 $f(2x)=e^x f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$。证明 $f(x)=e^x$，$\forall x\in(0,+\infty)$。

9 计算第一类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,\ y\le 0$。

10 设 Ω 是空间区域且不包含原点，其边界 Σ 为封闭光滑曲面；用 $\vec{n}$ 表示 Σ 的单位外法向量，$\vec{r}=(x,y,z)$ 和

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，证明 $\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{r} = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Sigma} \cos(\vec{n}, \vec{r})\, dS$。