华中科技大学08硕士研究生考试高等代数试题

1 若矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,求$A^*$的逆

2 假设A,B都是2×2的实矩阵,并且$A^2=B^2=E, AB+BA=O$,证明:存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, P^{-1}BP=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

3 假设$n\times n$实对称矩阵A,B以及$A-B$均是正定矩阵,证明:$B^{-1}-A^{-1}$也是正定矩阵

4 证明：向量$\alpha_1=(1,1,\cdots 1),\alpha_2=(1,1,\cdots 1,0),\cdots \alpha_n=(1,0,\cdots 0)$是n维向量空间的一组基。

5 设A,B分别为n阶正定和半正定矩阵，证明：$|A|+|B|\le|A+B|$,且仅当B=0时取等号

6 设A与B是n阶矩阵，证明AB与BA有相同的特征值。

7 设A为$m\times n$实矩阵，秩$(A)=n$，证明：

（1）$A'A$是正定矩阵；（2）方程组$AX=0$只有零解，这里$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

8 设α_1为线性变换T的特征向量，$(T-\lambda E)\alpha_1=0$，这里E为恒等变换，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足$(T-\lambda E)\alpha_{i+1}=\alpha_i, i=1,2,\cdots,r-1.$ 证明：向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

9 设V和W都是数域F上向量空间，$L(V)$和$L(W)$分别是V和W的线性变换组成的向量空间，f是V到W的同构映射。

1． 证明：$\forall\sigma\in L(W)$，有$f^{-1}\sigma f\in L(V)$；

2． 证明：$L(W)\cong L(V)$，这里$\cong$表示同构。

10 设A,B都是n阶矩阵，且$ABA=B^{-1}$.

证明： 秩$(E-AB)+$秩$(E+AB)=n.$