# 武汉大学一九九九年攻读硕士学位研究生入学考试试题解答

考试科目:数学分析　　　　编号:01A

一解：由题设知 $u_1=3,u_{n+1}=3+\frac{4}{u_n}(n=1,2,\ldots)$，$3\le u_n\le 5,\quad(n=1,2,\ldots)$，于是，$|u_{n+1}-4|=\left|\left(3+\frac{4}{u_n}\right)-4\right|=\frac{|u_n-4|}{|u_n|}\le\frac{1}{3}|u_n-4|$，从而 $0\le|u_n-4|\le\frac{1}{3}|u_{n-1}-4|\le\ldots\le\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|u_1-4|=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\to0(n\to\infty)$，由迫敛性定理知 $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$。

二.解：不收敛。级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 收敛，设其和为S，则级数

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{2n}+\ldots$ 的前2n项和 $S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+S$，因 $-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+S\to-\infty(n\to\infty)$，故 $S_{2n}\to-\infty$

$(n\to\infty)$。由此知原级数发散。

三.解：因 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e$，故级数的收敛半径R=$\frac{1}{e}$。当 $x=\pm\frac{1}{e}$时，由

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e,\therefore\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\pm e}\right|>1$，故级数发散，于是级数的收敛区域为 $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$。

四.解：由拉格郎日乘数法作函数 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=xyz+\lambda(x+y-1)+\mu(x-y+z^2-1)$

，令L关于 $x,y,z,\lambda,\mu$ 的偏导数为零得 $\begin{cases}L_x=yz+\lambda+\mu=0\\L_y=xz+\lambda-\mu=0\\L_z=xy+2z\mu=0\\L_\lambda=x+y-1=0\\L_\mu=x-y+z^2-1=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\y=\frac{3}{5}\\z=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}\\\lambda=\mp\frac{\sqrt{30}}{10}\\\mu=\mp\frac{\sqrt{30}}{50}\end{cases}$ 或

$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=0\\\lambda=0\\\mu=0\end{cases}$ 具体验证知，（1，0，0）

不是条件极值点，f在点（$\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{\sqrt{30}}{5}$）达到极大值 $\frac{6\sqrt{30}}{125}$，在点 $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},-\frac{\sqrt{30}}{5}\right)$ 达到极小值 $-\frac{6\sqrt{30}}{125}$。

五.祥见96年第六题为连续函数

六.证明：由f的连续性知，存在 $M>1$,使得对 $\forall v x\in[0,1]$有 $|f(x)|\le M$，又由 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}dy=1$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1$，使得当 $n\ge N_1$时，有 $\left|\frac{2}{\pi}\int_n^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}\right|<\frac{\varepsilon}{3(M+|f(0)|)}$

再由f(x)的连续性知，对上述 $\varepsilon>0,\exists\delta>0$（不妨设 $\delta<1$），使得对 $\forall x\in U_+(0,\delta)$，有 $|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ 令 $N=\left[\frac{N_1}{\delta}\right]$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx-f(0)\right|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^n\frac{f(\frac{y}{n})-f(0)}{y^2+1}dy-\frac{2}{\pi}\int_n^{+\infty}\frac{f(0)dy}{y^2+1}\right|$$

$$\le\frac{2}{\pi}\int_0^{N_1}\frac{\left|f(\frac{y}{n})-f(0)\right|}{y^2+1}dy+\frac{2}{\pi}\int_{N_1}^{n}\frac{\left|f(\frac{y}{n})-f(0)\right|}{y^2+1}dy+\frac{2}{\pi}|f(0)|\int_n^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}<\frac{\varepsilon}{3}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}+(M+|f(0)|)\frac{2}{\pi}\int_{N_1}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}+|f(0)|\frac{2}{\pi}\int_n^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

由此知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx=f(0)$

七。证明：用反证法。假如 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛，则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$，使当n>N( ε)时对一切 $p\in N$ 及 $\forall x\in[a,b)$ 均有 $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon$ ,又因 $u_n(x)$在[a,b )上连续，在上式中令 $x\to b$ 得

$|u_{n+1}(b)+\cdots+u_{n+p}(b)|\le\varepsilon$ ,再由级数的Cauchy收敛原理知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 收敛，矛盾。