# 武汉大学一九九七年攻读硕士学位研究生入学考试试题解答

考试科目:数学分析　　　　编号:01A

一证明：因 $a_n>0$ 且 $a_n$ 不趋于 $+\infty$，故存在 $M>0$，使得对 $\forall N, n>N$ 时满足 $0<a_n\le M$，依次令N=1，可得n，使得 $a_n\in$（0，M），N= $n_1$，可得 $n_2\ge n_1$ 使得 $a_{n_2}\in$（0，M]，一般地，令N= $n_k$，使得 $n_{k+1}>n_k$ 使得 $a_{n_{k+1}}\in(0,M]$，这样得到 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}\subset(0,M]$，由致密性定理，$\{a_{n_k}\}$ 必有收敛子列，不妨设是收敛，即得 $\{a_n\}$ 的收敛子列

二证明：由题设条件知对 $\forall n>N$ 有 $f(y+\frac{1}{n})-f(y)=0$，$y\in(-\infty,a-2)\cup(b+2,+\infty)$，又由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x)$ 在 $[a-2,b+2]$ 上必一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$（不妨设 $\delta<1$）使对 $\forall x_1,x_2\in[a-2,b+2]$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-x_2|<\varepsilon$，令 N= $[\frac{1}{\delta}]$，即当 $n>N$ 时就有 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(y+\frac{1}{n})-f(y)]dy=\int_{a-2}^{b+2}[f(y+\frac{1}{n})-f(y)]dy\le\int|f(y+\frac{1}{n})-f(y)|dy<\varepsilon(b-a+4)$ 由此知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[f(y+\frac{1}{n})-f(y)]dy=0$

三．证明：设L：$x^2+y^2=1$，则 $f(x,y)$ 在L上连续，且L为有界闭集，故 $f(x,y)$ 在L上有最大值最小值，分别设为 $\beta,\alpha$,

则由题设条件知 $\beta\ge\alpha>0$，又因 $f(cx,cy)=cf(x,y),\ \forall c>0$，当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时，有

$f(x,y)=f(\sqrt{x^2+y_2}\cos\theta,\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta)=\sqrt{x^2+y^2}f(\cos\theta,\sin\theta)$，故

$\alpha\sqrt{x^2+y^2}\le f(x,y)\le\beta\sqrt{x^2+y^2}$，令 $(x,y)\to(0,0)$，由迫敛性定理知 $f(x,y)\to0((x,y)\to(0,0))$，又 $f(x,y)$ 连续，故 $f(0,0)=0$，故上述不等式对 $(0,0)$ 点也成立。

四．证明：因 $u=u(t,x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，故由高斯公式有:

$$\oiint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial v}dS=\oiint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}\nabla udS=\iiint\limits_{\Omega}\nabla\cdot(\frac{\partial u}{\partial t}\nabla u)dV=\iiint\limits_{\Omega}\nabla(\frac{\partial u}{\partial t})\cdot\nabla udV+\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}\Delta udV$$

而 $$\iiint\limits_{\Omega}\nabla(\frac{\partial u}{\partial t})\cdot\nabla udV=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)\cdot\nabla udV=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}|\nabla u|^2dV=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dV$$

故 $$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t}\Delta udxdydz=\oiint\limits_{\partial\Omega\text{外侧}}\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial v}dS-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dxdydz$$ 。

五．证明：1）反证。假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续，不妨设 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的不连续点，即 $\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$ 总 $\exists x\in U^0(x_0,\delta)$，使得 $|f(x)-f(x_0)|\ge\varepsilon_0$，现取 $\delta<\frac{\varepsilon_0}{3N}$，则 $\exists x'\in U^0(x_0,\delta)$，即 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon_0}{3N}$，使得 $|f(x')-f(x_0)|\ge\varepsilon_0$，又因 $f_n(x')\to f(x'),f_n(x_0)\to f(x_0)(n\to\infty)$ 故 存在N使得 $|f_N(x')-f(x')|<\frac{\varepsilon_0}{3}$，$|f_N(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{3}$，再由题设条件 $|f_N(x')-f_N(x_0)|\le M|x'-x_0|<\frac{\varepsilon_0}{3}$

于是 $|f(x')-f(x_0)|\le|f(x')-f_N(x')|+|f_N(x')-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_0}{3}+\frac{\varepsilon_0}{3}=\varepsilon_0$ 矛盾，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

2）假设 $f_n(x)$ 在[a，b]上非一致收敛于 $f(x)$ 则 $\exists\varepsilon_0>0$，对 $\forall N$ 总有 $n>N$ 及 $x'\in[a,b]$，使得 $|f_n(x')-f(x')|\ge\varepsilon_0$，依次令 $N_1=1$，存在 $n_1>N_1,x_1\in[a,b]$ 满足 $|f_{n_1}(x_1)-f(x_1)|\ge\varepsilon_0$，再令 $N_2=\max(2,n_1)$，存在 $n_2>N_2,x_2\in[a,b]$ 满足 $|f_{n_2}(x_2)-f(x_2)|\ge\varepsilon_0$，…… $N_k=\max(k,n_{k-1})$，存在 $n_k>N_k,x_k\in[a,b]$ 满足 $|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\ge\varepsilon_0$。又因数列 $\{n_k\}\to+\infty$，于是 $\forall x\in[a,b],f_{n_k}(x)\to f(x)(k\to+\infty),\{x_k\}\subset[a,b]$ 有收敛子列

六．证明：1）因 $g$ 在（0，0）可微，且 $g$（0，0）=0，故 $g$ 在（0，0）的全改变量为 $\Delta g=o(\sqrt{x^2+y^2})$，若设 $h(x,y)=\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，又 $g(0,0=0)$，则 $f(x,y)$ 在（0，0）点的全改变量为

$\Delta f=(g+\Delta g)(h+\Delta h)-gh=\Delta g(h+\Delta h)+g\Delta h=(h+\Delta h)o(\sqrt{x^2+y^2})$，因

$|h(x,y)|=\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le1$，故 $\Delta f=o(\sqrt{x^2+y^2})$，故 $f$ 在（0，0）可微，且 $df(0,0)=0$。

2）又 $f$ 在（0，0）可微知，$f(x,y)$ 在（0，0）点连续，又 $f(0,0)=0$，于是 $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)}f(x,0)=\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)}g(x,0)\sin\frac{1}{|x|}=0$，又由 $g$ 在（0，0）得知，$g(x,0)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $\mathop{Lim}\limits_{(x,0)\to(0,0)}g(x,0)=g(0,0)$，从而必有 $g(0,0)=0$。且由 $f$ 在（0，0）可微知 $f_x(0,0)$ 存，

$f_x(0,0)=\mathop{Lim}\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\mathop{Lim}\limits_{\Delta x\to0}\frac{g(\Delta x,0)}{\Delta x}\sin\frac{1}{|\Delta x|}$ 存在，又有 $g$ 在（0，0）得知，$g_x(0,0)=\mathop{Lim}\limits_{\Delta x\to0}\frac{g(\Delta x,0)-g(0)0,0}{\Delta x}$ 存在，故必有 $g_x(0,0)=0$，从而 $f_x(0,0)=0$，

同理可证 $f_y(0,0)=g_y(0,0)=0$，最后在由 $f$ 在（0，0）的可微性得 $df(0,0)=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y=0$。