武汉大学一九九六年攻读硕士学位研究生入学考试试题解答

考试科目数学分析　　　　编号:01A

一. 证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$, 又 $a_n^+ = \dfrac{a_n+|a_n|}{2}$, $a^+ = \dfrac{a+|a|}{2}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}(a_n+|a_n|) = \dfrac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|) = \dfrac{a+|a|}{2} = a^+$.

二. 证明：1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|\alpha| = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}|f(x,y)-A| = 0$. 于是，由 $0 \le \left|\dfrac{\alpha(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right| \le |\alpha|$，应用迫敛性得：

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\alpha(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$, 即 $\alpha(x-x_0) = o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})((x,y)\to(x_0,y_0))$.

2) 由 $g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，可设 $\Delta g = B\Delta x + C\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$，由于 $g(x_0,y_0)=0$，不妨设 $f(x_0,y_0)=A$，则

$\Delta z = \Delta f g + (f+\Delta f)\Delta g$

$= (A+\alpha)(B\Delta x + C\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})) = AB\Delta x + AC\Delta y + \alpha B\Delta x + \alpha C\Delta y + (A+\alpha)o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$

再结合1) 得 $\Delta z = AB\Delta x + AC\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$, 从而 $z = f(x,y)g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

三. 证：由题设条件知：$\exists x' \in (a, b)$ 使得 $f(x') = c > 0$，再由 $f(x)$ 的连续性及 $f(x)\ge 0$，知

$\exists U(x', \delta) \subset [a, b]$, 使得 $f(x) \ge \dfrac{c}{2}$, $\forall x \in U(x', \delta)$，故

$\int_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{[a,b]-U(x',\delta)} f(x)\,dx + \int_{x'-\delta}^{x'+\delta} f(x)\,dx \ge \int_{x'-\delta}^{x'+\delta}\dfrac{c}{2}dx = c\delta > 0$。

四. 证明：1) 因 $\forall k\in N$ 有 $\dfrac{2k-1}{2k} < \dfrac{2k}{2k+1}$, 故 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

从而 $\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \dfrac{1}{2n+1}$，开方得证。

2) 因 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \Big/ \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+2} = 1$，故级数的收敛半径为R=1。

当x=1时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n$, 显然 $\left\{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}$ 单调下降，又由1) 及夹逼原则知其极限为0（当 $n\to\infty$ 时），由交错级数的莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n$, 收敛。

当x=-1时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由 $\dfrac{1}{2}\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \le \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 得：$\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \ge \dfrac{1}{2}\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \dfrac{1}{4n}$，于是 $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ge \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$，

因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 发散。综上，级数的收敛域为 $(-1,1]$;

3) 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-x)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 若级数在 $(-1,1]$ 上一致收敛，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)$，使得 $n > N(\varepsilon)$ 时有 $|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| < \varepsilon$ 对 $\forall p\in N$ 及 $\forall x\in(-1,1]$ 成立，由于 $u_n(x)\in C[-1,1](n=1,2\cdots)$，令

$x\to -1$, 就得：$|u_{n+1}(-1)+\cdots+u_{n+p}(-1)| \le \varepsilon$

这与原级数在x=-1处发散矛盾。从而得证.

五. 证明：1) 由题设条件知 $\varphi(x)$ 有界，设 $|\varphi(x)|\le M$。对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 连续，故 $\exists\delta>0$ 使当 $|x|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(0)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$，于是若令 $N = [R/\delta]$，则当 $n > N$ 时，对 $\forall x\in[-R, R]$ 有 $\left|f(\dfrac{x}{n}) - f(0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{M}$，

从而 $\left|\varphi(x)f(\dfrac{x}{n}) - \varphi(x)f(0)\right| = |\varphi(x)|\left|f(\dfrac{x}{n}) - f(0)\right| < M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$，$\forall x\in[-R, R]$

当 $|x|\ge R$ 时 $\varphi(x)=0$，故当 $n > N$ 时，对 $\forall x\in R$ 有 $\left|\varphi(x)f(\dfrac{x}{n}) - \varphi(x)f(0)\right| < \varepsilon$，故 $\varphi(x)f(\dfrac{x}{n}) \Rightarrow \varphi(x)f(0)$，$n\to+\infty, (-\infty < x < +\infty)$;

2) 若 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = 1$, 则 $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(0)\,dx$，又 $n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x) \overset{y=nx}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)f(\dfrac{y}{n})dy$，故

$$\left|n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x)dx - f(0)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(x)f(\frac{x}{n}) - \varphi(x)f(0))dx\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi(x)f(\frac{x}{n}) - \varphi(x)f(0)\right|dx$$

$$= \int_{-R}^{+R}\left|\varphi(x)f(\frac{x}{n}) - \varphi(x)f(0)\right|dx$$

对 $\forall\varepsilon>0$，因 $\varphi(x)f(\dfrac{x}{n}) \Rightarrow \varphi(x)f(0)$，故 $\exists N$, 使得 $n>N$ 时有 $\left|\varphi(x)f(\dfrac{x}{n}) - \varphi(x)f(0)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2R}$, 从而有 $\left|n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x)dx - f(0)\right| < \varepsilon, (n>N)$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(nx)f(x) = f(0)$。

六解：椭球面的参数方程为 $x = a\sin\varphi\cos\theta$, $y = b\sin\varphi\sin\theta$, $z = c\cos\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi, 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$

$J = ab\sin\varphi\cos\varphi$，于是

$$\iint\limits_S xyz\,dxdy = \iint\limits_\Omega abc\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\cdot ab\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi d\theta$$

$$= \iint\limits_\Omega a^2b^2c\sin^3\varphi\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta\,d\varphi d\theta$$

$$= a^2b^2c\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{2}{15}a^2b^2c$$