武汉大学

2002年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：线性代数　　　　科目代码：474

注明：所有的答题内容必须答在答题纸上，凡答在试题上的一律无效。

一、(10分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & x_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & x_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x_4 \end{vmatrix}.$$

二、(10分) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．证明：α_1 不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表示．

三、(12分) 设 A 为 n 阶正交矩阵(即满足 $AA'=E$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，A' 表示矩阵 A 的转置)，且 $E+A$ 为可逆矩阵，证明：$(E-A)(E+A)^{-1}$ 是反对称矩阵．

四、(12分) 设 A、B 分别是 r, s 阶可逆矩阵，求分块矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵．

五、(12分) 设线性方程组

$$
\text{I)}\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases} \quad \text{与} \quad \text{II)}\begin{cases} ax_1+bx_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+ax_3=3 \end{cases}
$$

同解，求其通解和 a, b。

六、(20分)

设 $A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 是 n 阶矩阵，

1> 求 A 的特征值和特征向量；

2> 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

七、(12分) 设 A，C 是 n 阶实正定矩阵，B 是矩阵方程 $AX+XA=C$ 的唯一解，证明：

1> B 是对称矩阵；

2> B 是正定矩阵。

八、(12分) 设 f 是向量空间 V 的线性变换，且 $f^2=f$，证明：

$V=\mathrm{Im}f\oplus\mathrm{Ker}f$，其中 $\mathrm{Ker}f=\{\alpha\in V \mid f(\alpha)=0\}$，$\mathrm{Im}f=\{\alpha\in V \mid \text{存在}\beta\in V, \text{使} f(\beta)=\alpha\}$。