2003 年武汉大学数学分析考研试题

一、判断下列命题是否正确（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）：

1）单调序列$\{a_n\}$中有一子列$\{a_{n_i}\}$收敛，则序列$\{a_n\}$收敛。

正确。不妨设$\{a_{n_i}\}$收敛于 a，利用单调性那么不难证明$\{a_n\}$也收敛于 a

2）子列$\{a_n\}$的子序列$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n+1}\}$收敛，则序列$\{a_n\}$也收敛

不正确。只要$\{a_{2n}\}$和$\{a_{2n+1}\}$收敛于不同的极限，A、B 那么$\{a_n\}$不收敛

3）序列$\{a_n\}$收敛，则序列$\{|a_n|\}$收敛，其命题也成立

不正确。序列$\{a_n\}$收敛=〉序列$\{|a_n|\}$收敛，但反之命题不成立如$\{a_n\}: a_n=(-1)^n$

4）$\sum a_n$收敛，则$a_n=o(\frac{1}{n})$.

不正确。可以找到莱布尼兹级数$\{a_n\}: a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

5）函数序列$\{u_n(x)\}$，$x\in[a,b]$，满足对任意的自然数 p 和任意$x\in[a,b]$，有以下性质：

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)-u_{n+p}(x)|=0$，则$\{u_n(x)\}$一致收敛。

不正确。不妨设$x\in[0,1]$，$\{u_n(x)\}: u_n(x)=x^n$，

$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)-u_{n+p}(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^p)x^n=0$。显然$\{u_n(x)\}$并非一致收敛。

二、计算题（每小题 8 分，共 32 分）

1）设$F(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{|t|}\ln|t|\,dt,求F'(0)$

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{|t|}\ln|t|\,dt\Rightarrow F'(x)=\sqrt{|x|}\ln|x|$$

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\sqrt{|x|}\ln|x|=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\ln|x|}{\sqrt{|x|}}=0$$

（应用 L'Hospital 法则）

2）求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+x+o(x))-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+o(x^2)+\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{3}{2}$$

（应用 Taylor 展开）

3 ）

计算积分：$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV$，其中$V$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$和圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$之间的部分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dV=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\iiint\limits_V r^2r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^a r^4\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^4dr=2\pi\square(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{a^5}{5}$$

$$=\frac{(2-\sqrt{2})\pi a^5}{5}$$

4）计算曲面积分 $I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧

$$I=\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy=\iiint\limits_V (3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz=$$

$$\iiint\limits_V 3r^4\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^1 3r^4dr\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{12\pi}{5}$$

判断级数与反常积分的敛散性（共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分）

1）$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$　　2）$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x+\frac{1}{x}}dx$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2(x-\frac{\pi}{4})}{2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{2}}d(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx+\int_{1-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x+\frac{\pi}{2}}dx\text{。 发散}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2(x-\frac{\pi}{4})}{2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{2}}d(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx+\int_{1-\frac{\pi}{4}}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x+\frac{\pi}{2}}dx\text{。 发散}$$

3） $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^5}}$

4） $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \sum \frac{1}{(e^{\ln\ln n})^{\ln n}}$$
$$= \sum \frac{1}{n^{\ln\ln n}}$$

$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^5}}\right| \to 1$，从而知发散

当n足够大时$\frac{1}{n^{\ln\ln n}} < \frac{1}{n}$。收敛

设 a>0,求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2az \\ x^2 + y^2 + xy = a^2 \end{cases}$ 上的点到 xy-平面的最大最小距离

解 1：

$Lagrange$乘子法：$A = z + \lambda(x^2 + y^2 - 2az) + \mu(x^2 + y^2 + xy - a^2)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} = 2(\mu+\lambda)x + \mu y = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} = 2(\mu+\lambda)y + \mu x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\mu+\lambda)(x^2 - y^2) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z} = 1 - 2a\lambda = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2az = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \mu} = x^2 + y^2 + xy - a^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y) = \begin{cases} (a, -a)\text{取到最大值}a \\ (\frac{\sqrt{3}}{3}a, \frac{\sqrt{3}}{3}a)\text{取到最小值}\frac{a}{3} \end{cases}$$

解 2：（初等数学的不等式方法）当 z 取到最值，即 xy 取到最值

$$1)xy \ge 0\text{时}, x^2 + y^2 \ge 2xy,$$
$$a^2 = x^2 + y^2 + xy \le \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow z = \frac{x^2 + y^2}{2a} \ge \frac{a}{3}$$
$$2)xy \ge 0\text{时}, x^2 + y^2 \ge -2xy,$$
$$a^2 = x^2 + y^2 + xy \ge \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow z = \frac{x^2 + y^2}{2a} \ge a$$

设 0<c<1, $a_1 = \frac{c}{2}$，$a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^{\ 2}}{2}$ 。证明 $\{a_n\}$ 收敛，并求其极限

分析：只须满足 $a_1 \le 1 + \sqrt{1+c}$ 即可。

证明：

归纳法，假设$a_n \le 1+\sqrt{1-c}$

$$a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^{\ 2}}{2}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^{\ 2}-2a_n+c}{2}<0 \Rightarrow a_{n+1}\le 1+\sqrt{1+c}$$

又$a_n>0$。所以有界单调数列必然存在极限。

$$\text{解得极限}=\begin{cases}1+\sqrt{1-c}, & a_1=1+\sqrt{1-c}\\ 1-\sqrt{1-c}, & a_1<1+\sqrt{1-c}\end{cases}$$

设 f(t)在 R 上连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\frac{x^n}{1+x})dx=f(0)$

证明：（考虑$\frac{x^n}{1+x}$在（0，1）趋近于 0）

对$\forall\varepsilon>0,\forall x\in[0,\delta],\exists N,\forall n>N,x^n<\varepsilon$

$\frac{x^n}{1+x}$递增

$$\int_0^\delta f(\frac{x^n}{1+x})dx=\delta f(\xi_1),\text{其中}\xi_1\in(0,\frac{\delta^n}{1+\delta})\subseteq(0,\varepsilon)$$

$$\int_\delta^1 f(\frac{x^n}{1+x})dx=(1-\delta)f(\xi_2),\text{其中}\xi_1\in(\frac{\delta^n}{1+\delta},\frac{1}{2})$$

$$\int_0^1 f(\frac{x^n}{1+x})dx=\delta f(\xi_1)+(1-\delta)f(\xi_2)$$

根据连续性$f(\xi_2)$有界，$\lim\limits_{\varepsilon\to0,\ \delta\to1}\delta f(\xi_1)+(1-\delta)f(\xi_2)=\lim\limits_{\varepsilon\to0,\ \delta\to1}f(\xi_1)=f(0)$

证明含参量非正常积分：$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-xy^2}dy$，对任意$\delta>0$在$[\delta,+\infty]$一致收敛，而在$[0,+\infty]$上不是一致收敛的

证明：1）

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-xy^2}dy=\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}d\sqrt{x}y=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-xy^2}d\sqrt{x}y=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}M}e^{-y^2}dy$$

当$x\in[\delta,+\infty)$时，$\lim\limits_{M\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}M}e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$

显然是一致收敛的。

2）

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-xy^2}dy=\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}d\sqrt{x}y=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{M}e^{-xy^2}d\sqrt{x}y=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}M}e^{-y^2}dy$$

当$x\in(0,+\infty)$时，根据定义，利用反证法，如果一致收敛

对于$\forall\varepsilon>0,\forall x\in(0,+\infty),\exists N,\forall n,M>N$时

$$\varepsilon>\int_{\sqrt{x}N}^{\sqrt{x}M}e^{-y^2}dy\overset{y=\frac{t}{\sqrt{2}}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}xN}^{\sqrt{2}xM}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{F(\sqrt{2x}M)-F(\sqrt{2x}N)}{\sqrt{2}}$$

$F(x)$为标准正态分布的x上位数

令$M=N^2,x=\dfrac{1}{2N^2}$,右式$=\dfrac{F(N)-F(1)}{\sqrt{2}}$.

显然与上述不等式矛盾。从而命题成立