2006年武汉大学高等代数考研试题

一、设矩阵 A=$\alpha\alpha^T$，其中α是 n 维列向量，α^T是α的转置。又已知$\alpha^T\alpha$=1

（1） 证明A^2=A

（2） 证明 B=E+A+A^2+…….+ A^n是可逆矩阵，并求B^{-1}，这里 E 是 n 阶单位矩阵

二、已知向量

α_1=（1 2 4 3） α_2=（1 -1 -6 6） α_3=（-2 –1 2 -9），α_4=(1 1 -2 7)

β=(4 2 4 a) 这里都是列向量。

（1） 求线形子空间 W=L（α_1 α_2 α_3 α_4）的维数与一个基

（2） 求 a 的值，使得$\beta\in$ W ，并求β在（1）所选基下的坐标

三、设

$P[x]_2$表示实数域上的次数不超过 2 的多项式构成的线形空间，已知f_1=1-x

f_2=1+x^2 f_3=x + 2x^2是$P[x]_2$的一个基，$P[x]_2$的线形变换σ满足σ（f_1）=2+x^2，

σ（f_2）=x σ（f_3）=1+x + x^2

（1） 求基 1 x x^2 到基f_1 f_2 f_3的过度矩阵

（2） 求σ在基f_1 f_2 f_3下的矩阵

（3） 设 f = 1+2x + 3x^2，求σ（f）

四、设 A =（α_1 α_2，。。。。。α_r）是 n×r 矩阵×，B =（β_1 β_2 β_3 。。。。β_s）是 n×s ×矩阵，rank（A）=r ，rank（B）=s ，证明；若 r+ s>n， 则必存在非零的向量ξ，使得ξ既可由α_1 α_2，。。。。。α_r线形表示，又可以有β_1 β_2 β_3 。。。。β_s线形表示。

五、设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 m×n 实矩阵。试证明B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 rank（B ）= n

六、已知 3 阶矩阵 A 满足/ A – E/ = /A- 2E/ = /A+E/ = λ

(1) 当λ=0 时，求行列式 /A+3E/ 的值

(2) 当λ=2 时，求行列式 /A+3E/ 的值

七 、求 矩阵

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$ 的 Jordan 标准形，并计算 e^A

（注意；按照通常定义 $e^A = E + A + \dfrac{A^2}{2!} + \dfrac{A^3}{3!} + \cdots\cdots$

八、设 n 阶矩阵 A ，B 满足 $A + B = AB$ ，且

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots\cdots \quad \lambda_n$ 是 A 的特征值。

（1） 证明：λ_i 不等于 1（下标 1 2 3 ....n）

（2） 证明,；若 A 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 P，

使得 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}\left(\dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_1}, \dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_2}, \cdots\cdots, \dfrac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\right)$

九、设 V 是 n 维欧矢空间，

$\eta_1 \quad \eta_2 \quad ,\cdots\cdots \eta_n$ 是 V 的一个标准正交基，（α ，β ）表示向量 $\alpha \ \beta \in V$ 的内积，令 $\xi = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \cdots\ a_n\eta_n$，其中 $a_1 \quad a_2 \quad \cdots\cdots \quad a_n$ 是 n 个不全为零的实数，对于给定的非零实数 k ，定义的线形变换为

$$\sigma(\alpha) = \alpha + k(\alpha\ \xi)\xi \qquad \text{任意 } \alpha \text{ 在 V 中}$$

（1） 求 在 $\eta_1 \quad \eta_2 \quad ,\cdots\cdots \eta_n$ 下的矩阵 A

（2） 求 A 的行列式 det （A）

（3） 证明 σ 为正交变换的充分必要条件是 $k = -\dfrac{2}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2}$

十、设数欲 K 上的 n 维矩阵 A B C D 关于矩阵的乘法两两交换，且满足 AC + BD =E ， 又设其次线形方程组 ABX=0 ，B X =0 与 AX=0 的解空间分别是 W I M 证明 I 与 M 的和是 W 的直和