武汉大学

2006年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：线性代数　　　　　　　　科目代码：474

注意：所有的答题内容必须答在答题纸上，凡答在试题或草稿纸上的一律无效。

一、(15分) 设矩阵 $A=\alpha\alpha^{T}$，其中 α 是 n 维列向量，α^{T} 是 α 的转置. 又已知 $\alpha^{T}\alpha=1$.

(1) 证明 $A^2=A$；

(2) 证明 $B=E+A+A^2+\cdots+A^n$ 是可逆矩阵，并求逆矩阵 B^{-1}. 这里 E 是 n 阶单位矩阵.

二、(15分) 已知向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-6\\6\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\-9\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}4\\2\\4\\a\end{pmatrix},$$

(1) 求线性子空间 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的维数与一个基；

(2) 求 a 的值，使得 $\beta\in W$，并求 β 在(1)所选基下的坐标.

三、(15分) 设 $P[x]_2$ 表示实数域上的次数不超过2的多项式构成的线性空间，已知 $f_1=1-x$，$f_2=1+x^2$，$f_3=x+2x^2$ 是 $P[x]_2$ 的一个基，$P[x]_2$ 的线性变换 σ 满足 $\sigma(f_1)=2+x^2$，$\sigma(f_1)=x$，$\sigma(f_1)=1+x+x^2$.

(1) 求由基 $1,x,x^2$ 到基 f_1,f_2,f_3 的过渡矩阵；

(2) 求 σ 在基 f_1,f_2,f_3 下的矩阵；

(3) 设 $f=1+2x+3x^2$，求 $\sigma(f)$.

四、(15分) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$ 是 $n\times r$ 矩阵，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 是 $n\times s$ 矩阵，$\mathrm{rank}(A)=r$，$\mathrm{rank}(B)=s$. 证明：若 $r+s>n$，则必存在非零向量 ξ，使得 ξ 既可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，又可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.

五、(15分) 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵. 试证 $B^{T}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $\mathrm{rank}(B)=n$.

六、(15 分) 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=\lambda$.

(1) 当 $\lambda=0$ 时，求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 的值；

(2) 当 $\lambda=2$ 时，求行列式 $|\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}|$ 的值.

七、(15 分) 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形，并计算 $e^{\boldsymbol{A}}$ (注：按通常定义 $e^{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{2!}+\frac{\boldsymbol{A}^3}{3!}+\cdots$).

八、(15 分) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(1) 证明：$\lambda_i\neq 1,(i=1,\cdots,n)$；

(2) 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1},\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2},\cdots,\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\right).$$

九、(15 分) 设数域 $\mathbf{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 关于矩阵乘法两两可换，且满足 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{E}$ (其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵)，又设齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间分别为 W,V_1 和 V_2. 证明：$W=V_1\oplus V_2$.

十、(15 分) 设 V 是 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的一个标准正交基，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 表示向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 的内积. 令 $\boldsymbol{\xi}=a_1\boldsymbol{\eta}_1+a_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\eta}_n$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不全为零的实数. 对于给定的非零实数 k，定义 V 的线性变换为

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi},\quad \forall\boldsymbol{\alpha}\in V.$$

(1) 求 σ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A})$；

(3) 证明：σ 为正交变换的充分必要条件是 $k=-\frac{2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

(满分值 150 分)