

武汉大学 2006 年数学分析试题

一、已知: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 3$, 求常数 a, b .

二、已知: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^{n^2}$, 求其收敛域。

三、 f 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(1) = 2f(0)$, 求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $(\xi + 1)f'(\xi) = f(\xi)$ 。

四、已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 0, 0 < f'(x) \leq 1$ 。求证:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(x) dx.$$

五、已知 f 在 $[a, b]$ 上单调递增, $f(a) \geq a, f(b) \leq b$, 求证: $\exists \xi \in [a, b]$, 使得

$$f(\xi) = \xi$$

六、在过 $O(0, 0), A(\pi, 0)$ 的曲线 $L: y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求出使得 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小的。

七、求第二型曲面积分 $I = \iiint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, S 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧

八、求证 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x+y} e^{-xy} dx$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

九、已知方程 $x^2 + y - \cos(xy) = 0$

(1) 研究上述方程并说明它在什么时候可以在点 $(0, 1)$ 附近确定函数 $y = y(x)$,

且 $y(0) = 1$ 。

(2) 研究函数 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 附近的可微性。

(3) 研究函数 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 附近的单调性。

(4) 试问上述方程在点 $(0, 1)$ 的充分小邻域内可否确定函数 $x = x(y), x(1) = 0$? 并说明理由