武汉大学

2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：线性代数　　　　科目代码：464

注意：所有的答题内容必须答在答题纸上，凡答在试题或草稿纸上的一律无效。

一、（15 分）已知 $A^2=\begin{pmatrix}2&-1&0\\7&-3&0\\0&0&9\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-27\end{pmatrix}$，求 A.

二、（15 分）计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_1-b_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2-b_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1&a_2&a_3-b_3&\cdots&a_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n-b_n\end{vmatrix},$$

其中 $b_i\neq0$，$(i=1,2,\cdots,n)$.

三、（15 分）设四元线性齐次方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases}x_1+x_3=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组(Ⅱ)的通解为 $k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)$.

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系.

(2) 问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解，若没有，则说明理由.

四、（15 分）设数域 K 上的 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_5$ 的通解为

$$k(2,0,-3,1)^T+(1,2,-1,0)^T,\quad（其中\ k\in K）.$$

试问：(1) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性表示？(2) $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示？若可以表示，则写出一般表示式；若不能表示，则说明理由.

五、（15 分）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶矩阵，且 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=0$，$\forall i=1,2,\cdots,n$，求证：$A_{11}=A_{12}=\cdots=A_{1n}$，这里 A_{1j} 为 a_{1j} 的代数余子式.

六、(15 分) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$，证明：

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB}^2)=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^2).$$

七、(15 分) 已知 $\boldsymbol{A}\in M_4(K)$ 相似于分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{E}_2$ 是 2 阶单位矩阵.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子组；

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形；

(3) 求 $\boldsymbol{A}$ 的极小多项式.

八、(15 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶半正定矩阵，并且满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$. 证明：

(1) $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵；

(2) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

九、(15 分) 设 $V=M_2(C)$ 是二阶复方阵全体在通常运算下所构成的复数域 C 上的线性空间，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in V$. 定义 V 的线性变换为

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{XA},\quad \forall \boldsymbol{X}\in V$$

(1) 求 f 在 V 的基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵 $\boldsymbol{M}$；

(2) 请给出 V 关于 f 的两个非零不变子空间 V_1,V_2 使得 $V=V_1\oplus V_2$（要求给出 V_1,V_2 的基，并阐述“V_1,V_2 关于 f 是不变的”以及“$V=V_1\oplus V_2$”的理由）；

(3) 证明：存在 V 的一个基使得 f 在这个基下的矩阵为对角阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

十、(15 分) 设 n 维欧氏空间 V 的两个线性变换 σ,τ 在 V 的一个基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 证明：若 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\|\sigma(\boldsymbol{\alpha})\|=\|\tau(\boldsymbol{\alpha})\|$，则存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB}$.

（满分值 150 分）