

武汉大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称: 线性代数(A 卷)

科目代码: 868

注意: 所有的答题内容必须答在答题纸上, 凡答在试题或草稿纸上的一律无效。

一、(15 分) 设 A 是一个非零方阵, 且 $A^3 = A^2$, 问是否一定有 $A^2 = A$? 为什么?

二、(15 分) 设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为 n 个实数 ($n \geq 2$), 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 + 1 & \cdots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 + 1 & \cdots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \cdots & a_n^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

求 A 的行列式 $\det(A)$.

三、(15 分) 设 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 中元素 a_{11} 的代数余子式 $A_{11} \neq 0$, 而 $\det(A) = 0$.

(1) 试确定齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间 W 的维数 $\dim(W)$;

(2) 问 A 的伴随矩阵 A^* 中是否存在列向量构成 W 的一个基? 为什么?

(3) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的列向量, 证明 α_1 一定可由 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示式惟一.

四、(15 分) 设 $M_2(K)$ 表示数域 K 上全体 2 阶方阵按矩阵加法与数乘构成的 K 上的线性空间, W_1, W_2 是 $M_2(K)$ 的子空间, $W_1 = L(A_1, A_2)$, $W_2 = L(B_1, B_2)$, 其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $W_1 + W_2$ 的一个基与维数;

(2) 求 $W_1 \cap W_2$ 的一个基与维数;

(3) 问 $M_2(K) = W_1 \oplus W_2$ 是否成立? 为什么? (注: “ $\oplus$ ” 表示直和.)

五、(15 分) 设 η_1, η_2, η_3 是 3 维欧氏空间 V 的一个规范正交基, 试求正交变换 σ , 使

$$\sigma(\eta_1) = \frac{2}{3}\eta_1 + \frac{2}{3}\eta_2 - \frac{1}{3}\eta_3,$$

$$\sigma(\eta_2) = \frac{2}{3}\eta_1 - \frac{1}{3}\eta_2 + \frac{2}{3}\eta_3.$$

六、(15分) 设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 是正定矩阵, 其中 A, B 分别为 m 阶, n 阶实对称矩阵, 而 C 为 $m \times n$ 实矩阵.

(1) 证明: A 是可逆矩阵;

(2) 证明: D 合同于分块对角矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^T A^{-1} C \end{pmatrix}$;

(3) 试判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵? 并证明你的结论.

七、(15分) 设 A 为 n 阶方阵, $\det(A) = 18$, 且 $3A + A^* = 15E_n$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E_n 为 n 阶单位矩阵.

(1) 求 A 的一个零化多项式 $f(\lambda)$;

(2) 求 A 的极小多项式 $m(\lambda)$;

(3) 求 A 的 Jordan 标准形.

八、(15分) 设 V 是复数域上的 n 维线性空间, σ, τ 是 V 的线性变换, 且 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 证明:

(1) σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 是 τ 的不变子空间;

(2) σ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间;

(3) σ, τ 至少有一个公共的特征向量.

九、(15分) 设 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上全体 2 阶方阵按矩阵加法与数乘构成的 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 定义 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的一个双线性函数为

$$f(A, B) = a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_3 b_4 - a_4 b_3,$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

(1) 证明 f 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 上的一个对称双线性函数;

(2) 求 f 在 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的基

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的度量矩阵;

(3) 求 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的一个基, 使 f 在该基下的度量矩阵为对角矩阵 $\text{diag}(1, 1, -1, -1)$.

十、(15分) 设 A, B 都是 n 阶矩阵, $AB = BA$, 证明:

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB).$$

(满分值 150 分)