武 汉 大 学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：数学分析　　　　　　　　科目代码：633

注意：所有的内容必须答在答题纸上，凡答在试题或草稿纸上的一律无效。

一、（本题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x)$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{1-n}(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})$，（其中 $n\geq 2$ 为整数）

3. $\begin{cases} x=t^3+t \\ y=\sin t\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

4. $f(x)=e^{ax}\sin bx$，求 $f^{(n)}(x)$

5.. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$

二、（本题 14 分） 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上连续，可导，且

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}f'(x)=a$$

求证：$f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上一致连续。

三、（本题 14 分） 设 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的正值连续函数，求证：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}f(x)$$

四、（本题 24 分） 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\cos(n^2 x)$。

1.证明函数项级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\cos(n^2 x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

2. 证明 $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{d^k}{dx^k}\cos(n^2 x)$，$k=1,2,\cdots$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

3.试求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数。

4.证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数的收敛半径为 0。

五、（本题 16 分） 设函数列{ $f_n(x)$ }在 $[a,b]$ 上的收敛于 $f(x)$，其中每个 $f_n(x)$ 都是单调函数。若 $f(x)$ 连续，则{ $f_n(x)$ }在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。

六、（本题 14 分） 设 $F(u,v)$ 是具有连续偏导数的二元函数。

1.验证 $w=F(xy,yz)$ 满足方程

$$x\frac{\partial w}{\partial x}+z\frac{\partial w}{\partial z}=y\frac{\partial w}{\partial y}$$

（这时，$F(xy,yz)$ 称为以上偏微分方程的完全积分）

2.利用猜试法求出以下偏微分方程的完全积分：

$$x_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+\cdots+x_m\frac{\partial w}{\partial x_m}=y\frac{\partial w}{\partial y}$$

七、（本题 14 分） 设 $F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$，求 $F'(t)$。

八、（本题 14 分） 计算积分

$$I=\oiint_S xzdydz+yzdzdx+z\sqrt{x^2+y^2}dxdy,$$

其中 S 是 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+z^2=4a^2, x^2+y^2=z^2, z>0$ 所围立体边界曲面的外侧（$a>0$）。