

武汉大学

2009 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

(满分值 150 分)

科目名称: 高等数学 (理学) (A 卷)

科目代码: 361

注意: 所有答题内容必须写在答题纸上, 凡写在试题或草稿纸上的一律无效。

一、填空题 (共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. (5 分) 设 $f(x+2) = 2^{x+2} - x$, 则 $f(x-2) = (2^{(x-2)^2} - x + 4)$ 。

2. (5 分) 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{1+x}}{x^2 + x - 2}$ 的极限值为 $(-\frac{\sqrt{2}}{6})$ 。

二、选择题 (共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. (5 分) 函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 是周期函数, 其最小正周期为 (C) 。

A. 2π B. π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

2. (5 分) 设函数 $f(x)$ 对一切 x 满足方程 $xf''(x) + 3x[f'(x)]^2 = 1 - e^{-x}$, 若 $f'(x_0) = 0$ ($x_0 \neq 0$), 则 (B) 。

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

三、解答题 (共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

1. (5 分) 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, $\varphi(x) = 1 - \ln x$, 求 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域。 $[1, e)$

2. (5 分) 求 a 为何值时, 曲线 $y = \ln x$ 与曲线 $y = ax^2$ 相切。

四、计算题 (共 5 小题, 每小题 10 分, 共 50 分)

1. (10 分) 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 试计算 $y'|_{x=0}$ 和 $y''|_{x=0}$ 的值。

2. (10 分) 试分别求不定积分 $\int xf(1-x^2)dx$ 和 $\int xe^{3x}dx$ 。

3. (10 分) 已知 $f(x) = \int_{-1}^x (1 + |t|)dt$ ($x \geq -1$), 试求曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的平面图形的面积。

4. (10 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 确定, 试求其 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

5. (10 分) 试求函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ 的收敛域。

五、证明题 (10 分)

设 $x > 0$, 常数 $a > e$, 试证明 $(a + \frac{1}{x})^x < a^x$ 。

六、推导题 (20 分)

试将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数, 并确定其展开区间。

七、应用题 (共 2 小题, 每小题 20 分, 共 40 分)

1. (20 分) 已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C = 25000 + 200x + (1/4)x^2$ (元), 试求:

(1) 若使平均成本最小, 应生产多少件产品?

(2) 若产品以每件 500 元售出时, 考虑要获得最大利润应生产多少件产品?

2. (20 分) 某湖泊的水量为 V , 每年排入该湖泊内含污染物 B 的污水量为 $(V/6)$, 流入该湖泊内不含 B 的水量为 $(V/6)$, 流出该湖泊的水量为 $(V/3)$ 。已知 2008 年底该湖泊中 B 的含量为 $5m_0$, 超过了国家标准。为治理污染和改善水质, 从 2009 年初起, 限定排入该湖泊中含 B 的污水浓度不超过 (m_0/V) 。试求至少需经过多少年, 该湖泊中 B 的含量降至 m_0 以内? (假设在该湖水中 B 的浓度是均匀的。)