数学分析考题

一、**填空题**（本题共 5 小题，每题 4 分满分 2 0 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=$ ______________

2. $(\cos x+2x\sin y)dx+(x^2\cos y)dy$ 的原函数是 __________________

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n x^n$ 的收敛半径是__________________

4. 方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值是__________________

5. 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在 $(1,1,1)$ 点出的切平面方程是__________________

二、**选择题**（本题共 5 小题，每题 4 分，满分 2 0 分，四个选择中仅有一个正确）

1 .设 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则下命题正确的是（　　　）

A．当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数。

B．当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数。

C．当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数。

D．当 $f(x)$ 是单调函数时，$F(x)$ 必是单调函数。

2．下列数项级数收敛的是　（　　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\sin\dfrac{1}{n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\cos\dfrac{1}{n}$

3.下列广义积分收敛的是　　(　　　)

A. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}dx$　B $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos 3x}{1+x^2}dx$　C $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$　D. $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^p}dx,\quad (p\le 1)$

4. 设函数 $u=2xz^3-yz-10x-23z$，则函数 u 在点(1,-2,2)处方向导数的最大值为（　　　）

A、$\sqrt{17}$　　B、$3\sqrt{5}$　　C、7　　D、3

5.设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，

令 $s_1=\int_a^b f(x)dx$，$s_2=f(b)(b-a)$，$s_3=\dfrac{1}{2}[f(b)+f(a)](b-a)$，则有（　　　）

A、$s_1<s_2<s_3$　　　　B、$s_2<s_1<s_3$

C、 $s_3 < s_1 < s_2$ D、 $s_2 < s_3 < s_1$

三、计算题（每题 **10** 分， 5 题，共 **50** 分）

1. 已知 $g(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{x}, & x<0 \\ A, & x=0 \\ Bx^2+C, & x>0 \end{cases}$

其中 $A,\ B,\ C$ 为常数，试问 $A,\ B,\ C$ 为何值，$g(x)$ 在 $x=0$ 处可导？ 并求 $g'(0)$.

2. 写出 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ 的幂级数表达式,并由此可求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的值

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D x\left[\ 1+yf(x^2+y^2)\ \right]dxdy$ 其中 D 为 $y=x^3$, $y=1$, $x=-1$ 所围成的区域， $f(t)$ 在 D 上连续。

4. 计算 $\iint\limits_s xz^2dydz+(x^2y-z^2)dzdx+(2xy+y^2z)dydx$

S 为半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ，取 S 的上侧。

5. 将 $f(x)=\begin{cases} e^x & -\pi\le x<0 \\ 1 & 0\le x\le\pi \end{cases}$ 展开成傅立叶级数

四、证明题（每题 12 分, 共 60 分）

1. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，$\varphi(x)$ 具有连续的一阶导数 。证明函数

$u(x,y)=\dfrac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\dfrac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(z)dz$ 满 足 弦 振 动 方 程

$\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$，及初始条件 $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=\varphi(x)$

2. 如果函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续， $f(a)=f(b)=0$ 且 $f'(a)f'(b)>0 \quad (a<b)$，试证至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上只有第一类间断点，证明 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有界。

4. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

（1） 求 $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$;

（2） 证明 $f(x,y)$ 在（0， 0）点连续；

（3） 证明 $f(x,y)$ 在（0， 0）点不可微.

5. 证明含变量广义积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$

（1）在 $[a,+\infty)$ 一致收敛 （$a>0$）； （2）在（0, $+\infty$）不一致收敛。

数学分析考题参考答案

一、1． 1　　2. $u(x,y)=\sin x+x^2\sin y+c$　　3. R=1

4．$\max y(x)=1,\quad \min y(x)=-1$　　5. $x+2y+3z=6$

二、1.A　2.D　3.B　4.C　5.B

三、1 解：由 $g(x)$ 在 0 点可导，故在此点比连续

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0}(Bx^2+C)=C=\lim_{x\to0-}x^2\cos\frac{\pi}{x}=0=g(0)=A$$ …………5 分

$$g'(0)=g'_-(0)=g'_+(0)$$

$$g'_-(0)=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{\pi}{x}-0}{x}=0,\qquad g'_+(0)=\lim_{x\to0}\frac{Bx^2-0}{x}=0$$

由此知 A=C=0　B 为任意常数，　$g'(0)=0$　　……………10 分

2 解：$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$　　$\frac{e^x-1}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$ …….3 分

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$$ ……………7 分

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$$ ……………9 分

令 $x=1$ ，　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$ ……………10 分

3．解：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad F'(x)=f(x)$　　……………2 分

$$\iint_D x[\ 1+yf(x^2+y^2)\ ]dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}x[1+yf(x^2+y^2)]dy$$ ……………5 分

$$=\int_{-1}^{1}x(1-x^3)dx+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}xyf(x^2+y^2)dy$$ ……………7 分

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dx\int_{x^3}^{1}xf(x^2+y^2)d(x^2+y^2)$$ ……………8 分

$$=-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x[F(1+x^2)-F(x^2+x^6)]dx$$ ……………9 分

$$=-\frac{2}{5}$$ ……………10 分

4. 解：补平面区域 D： $x^2+y^2\le a^2$， $z=0$ 取下侧。$S_1=S+D$ 为封闭曲面取外侧

$$\iint_S xz^2dydz+(x^2y-z^2)dzdx+(2xy+y^2z)dydx=\oiint_{S_1}-\iint_D$$ ……………3 分

$$=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz-0$$ ……………7 分

$$=\int_0^a r^4dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi=\frac{2}{5}\pi a^5$$ ……………10 分

5. $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^xdx+\int_0^{\pi}1dx\right)=\frac{1}{\pi}(2+\pi)=1+\frac{2}{\pi}$ ………2 分

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2+1}e^x\cos nx+ne^x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$=\frac{\left(1+(-1)^n\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$ ……………………………4 分

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2+1}e^x\sin nx-ne^x\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}+(-1)^n\frac{n^2-1}{\pi n\left(n^2+1\right)}$$

………………6 分

$$\therefore\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)+\sum\frac{1+(-1)^n}{\pi\left(n^2+1\right)}\cos nx+\left(\frac{1}{n\pi}+(-1)^n\frac{n^2-1}{\pi n\left(n^2+1\right)}\right)\sin nx$$ ………10 分

四、1．证明：$u_t=\frac{a}{2}[f'(x+at)-f'(x-at)]+\frac{a}{2a}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$…… 3 分

$u_{tt}=\frac{a^2}{2}[f''(x+at)+f''(x-at)]+\frac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]$（1）…… 5 分

$u_x=\frac{1}{2}[f'(x+at)+f'(x-at)]+\frac{1}{2a}[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)]$…… 7 分

$u_{xx}=\frac{1}{2}[f''(x+at)+f''(x-at)]+\frac{1}{2a}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]$ （2）...... 9分

比较 （1）（2）得： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 10分

$u(x,0)=f(x)\quad u_t(x,0)=\varphi(x)$ 12分

2． 证明：假定 $f'(a)>0,\quad f'(b)>0$

$$f'(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$$

$\exists\delta_1>0$，$f(x)>f(a)=0\quad x\in U(a+,\delta_1)$ 4分

$$f'(b)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

$\exists\delta_2>0$，$f(x)\langle f(b)=0\quad x\in U(b-,\delta_2)$ 8分

取 $x_1\in U(a+,\delta_1)\quad x_2\in U(b-,\delta_2)\quad f(x_1)>0,\quad f(x_2)<0$ 10分

由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续和介值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$

...... 12分

3．证明：用有限覆盖定理证明．$\forall x'\in[a,b]$, 若 $f(x)$ 在 x' 点连续，则 $\exists\,\delta'>0$

$f(x)$ 在 $U(x',\delta')$, 有界；若 x' 是 $f(x)$ 的第一类间断点，有 $f(x)$ 在 x' 点左右极限存在，故在 $U(x',\delta'')$, 内，$f(x)$ 有界．取 $\delta=\min\{\delta',\ \delta''\}$ $f(x)$ 在 $U(x',\delta)$, 有界；所有 $U(x',\delta)$, 构成的开覆盖 $\{U(x',\delta)\}\supset[a,b]$，存在有限个开覆盖 $\bigcup_{k=1}^{n}U(x_k,\delta_k)\supset[a,b]$，在 $U(x_k,\delta_k)$ 内，$|f(x)|\le M_k$ 取 $M=\max\{M_1,M_2,...,M_n\}$，$|f(x)|\le M$，$\forall x\in[a,\ b]$

...... 12分

4．解：（1）当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时

$f'_x(x,y)=\frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$f'_y(x,y)=-\frac{2yx^3}{(x^2+y^2)^2}$ 3分

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=1$$

$f'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$ 6分

（2）由于 $\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| \le |x| \to 0$， $(x, y) \to (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

所以 $f(x,y)$ 在（0， 0）点连续；...... 8分

（3）
$$\lim_{\rho\to 0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x'(0,0)x - f_y'(0,0)y}{\rho}$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ x=y}} -\frac{x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

$f(x,y)$ 在（0， 0）点不可微...... 12分

5．证明：（1）因为 $\displaystyle\int_A^{+\infty} xe^{-xy}dy = -e^{-xy}\Big|_A^{+\infty} = e^{-xA} \le e^{-aA} \quad (x \ge a)$

$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-aA} = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_0 > 0, \quad e^{-aA} < \varepsilon \quad as \quad A > A_0$

$\displaystyle\left|\int_A^{+\infty} xe^{-xy}dy\right| \le e^{-aA} < \varepsilon$ 这说明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在 $[a, +\infty)$ 一致收敛...... 6分

（2）要证 $\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \forall \quad A_0 > 0, \quad \exists A > A_0$， $x_0 \in (0, \quad +\infty)$

使得 $\displaystyle\left|\int_A^{+\infty} x_0 e^{-x_0 y}dy\right| \ge \varepsilon_0$，又 $\displaystyle\int_A^{+\infty} xe^{-xy}dy = -e^{-xy}\Big|_A^{+\infty} = e^{-xA}$

取 $x_0 = \dfrac{1}{A}, \quad \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}e^{-1}$ 就有 $\displaystyle\int_A^{+\infty} x_0 e^{-x_0 y}dy = e^{-1} > \varepsilon_0$ 9分

即 $\exists \quad \varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}e^{-1} > 0 \quad \forall \quad A_0 > 0, \quad \exists\, A > A_{0,}\ x_0 = \dfrac{1}{A} \in (0, +\infty)$

使得 $\displaystyle\left|\int_A^{+\infty} x_0 e^{-x_0 y}dy\right| = e^{-1} > \frac{1}{2}e^{-1} = \varepsilon_0$ 12分

$\displaystyle\int_A^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在（0， $+\infty$）不一致收敛。