华北水利水电学院 2007 年攻读硕士学位研究生招生命题考试

数学分析　试题

注意事项：1、答案全部答在答题纸上，写在试卷上无效；
2、考试时间 180 分钟（3 个小时），满分 150 分。

一、填空题（每小题 **4** 分，共 **32** 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x\tan^2 x(e^{2x}-1)} =$ ______________________.

2、积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2x^2 + x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}dx =$ ______________________.

3、已知 $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，则 $f^{(n)}(0) =$ ________________.

4、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)^{n^2} =$ __________ .

5、$\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2ydx + 2(x+y)dy =$ ______________.

6、函数 $f(x)$ 连续可导，$f(0)=0$. 则 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz =$ _________.

7、级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$ 的收敛区间是 ________________________ .

8、不定积分 $\int \ln(1+x)dx =$ ______________________________ .

二、选择题（每小题 **3** 分，共 **21** 分；每题只有一个正确答案）

9、在有理数集内，下列叙述正确的是____________________.

A）一定成立确界定理　　　　B）一定成立聚点定理

C）一定成立 Cauchy 收敛准则　D）以上三个结论都不正确

10、下列命题正确的是________________.

A）所有初等函数在其定义域内都是连续的

B）函数 $f(x)$ 在闭区间上有原函数，则 $f(x)$ 在该区间上一定可积

C）已知 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 一定有切平面方程，且其方程为 $z-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

D）已知 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿任何方向的方向导数都存在，但反过来未必成立

11、在点 $(0,0)$ 不可微的函数是 ________________ .

A） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　　B） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

C） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x-y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$　　D） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

12、已知函数 $f(x,y),g(x,y)$ 都可微， $g_y(x,y)\neq 0,(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在 $g(x,y)=0$ 下的极值，则下列说法正确的是________________.

A）若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$　　B）若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$

C）若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$　　D）若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$

13、下列说法不正确的是________________.

A）若 $f(x),g(x)$ 可积，但 $f(g(x))$ 未必可积　B）$H=\left\{\left(\dfrac{1}{n+2},\dfrac{1}{n}\right),n=1,2,\cdots\right\}$ 能覆盖 $(0,1)$

C）闭区间 $[a,b]$ 的全体聚点仍为 $[a,b]$　D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 也一致收敛

14、设 $f(x)=x\quad(0\le x\le \pi)$ 的 Fourier 级数展开式 $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}\sin nx$.则等式成立的区间是 ______________________ .

A）$[0,\pi]$　B）$[0,\pi)$　C）　$(0,\pi]$　D）　$(0,\pi)$

15、下列参变量积分在给定区间上不一致收敛的是 __________________ .

A） $\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx,\quad (-\infty,+\infty)$　　B） $\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}dy,\quad [a,b],a>0$

C） $\int_0^{1}\ln(xy)dy,\quad \left[\frac{1}{b},b\right],b>1$　　D） $\int_0^{+\infty}xe^{-xy}dy,\quad [0,b]$

三、**解答题**（本题共9小题，满分97分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤）

16、（**本题满分 10 分**）函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且存在斜渐近线，即存在常数 b,c 使 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-bx-c)=0$.证明函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

17、（**本题满分 12 分**）函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内二阶连续可导，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)\neq 0$.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(u)}{uf(x)}$，其中 u 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 的切线与 x 轴交点的横坐标.

18、（**本题满分 10 分**）证明不等式：

$$\frac{\pi^4(10-\pi^2)}{15}\le\iint_D\sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy\le\frac{\sqrt{6}\pi^3}{3},D:x^2+y^2\le\pi^2.$$

19、（**本题满分 12 分**）二元函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数， $f(1,0)=f(0,1)$. 证明在单位圆周上至少有两点满足方程 $yf_x(x,y)=xf_y(x,y)$.

20、（**本题满分 11 分**）计算曲面积分 $\iint_\Sigma x(8y+1)dydz-2(1-y)^2dzdx-4yzdxdy$, Σ 为曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y}\ (0\le y\le 1)\\ x=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周生成的曲面，法向与 y 轴正向的夹角为钝角.

21、（**本题满分 10 分**）设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于函数 $f(x)$，且每个 $f_n(x)$ 在 I 上一致连续，则 $f(x)$ 在 I 上也一致连续.

22、（**本题满分 11 分**）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，且在 $[a,b]$ 上仅有不连续点 $x_n\ (n=1,2,3,\ldots)$， $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

23、（**本题满分 10 分**）连续函数 $\phi(x)$ 满足 $\phi(x+1)=\phi(x), \int_0^1\phi(x)dx=0.\quad a_n=\int_0^1 f(x)\phi(x)dx$，

$f(x)$ 连续可导. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

24、（本题满分 11 分）计算曲线积分：

$$\int_C x^2 yzdx + (x^2+y^2)dy + (x+y+1)dz, \quad C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=x^2+y^2+1 \end{cases}$$

从 z 轴正向看取顺时针方向.