试卷编号:A

河南师范大学

二00八年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码:801　名称:高等代数　适用专业与方向:数学各专业

(必须在答题纸上答题,在试卷上答题无效,答题纸可向监考老师索要)

一. 填空题(每小题4分,共20分)

1. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$,

如果 $|A|=2, |B|=3$, 那么 $|2A-B|=$ ________.

2. 若实二次型 $f=2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 正定, 则 t 的取值范围是______.

3. 设 $xyzt\neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 0 & 0 \\ 1 & 0 & z & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}=$ $(1-t)yz+txyz$

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 为方阵 A 关于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量, $\beta=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$,

则 $A\beta=$ ________

5. 设 $r>1$, 且向量 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$; $\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$; ……,

$\beta_{r-1}=\alpha_1+\cdots+\alpha_{r-2}+\alpha_r$; $\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$, 则向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的秩 s 与向量组

$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 的秩 t 的大小关系是 $t \leq s$.

二. 选择题(每小题4分,共20分)

1. n维向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示, 但不能由向量组 (X): $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2}$ 线性

表示, 设向量组 (Y): $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2},\alpha_{m-1},\beta$; (Z): $\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-2},\alpha_m,\beta$, 则必有(B).

(A) α_m 可由 (X) 线性表示, 且 α_{m-1} 也可由 (X) 线性表示;

(B) α_m 可由 (Y) 线性表示, 且 α_{m-1} 可由 (Z) 线性表示;

(C) α_m 可由 (Y) 线性表示, 或者 α_{m-1} 可由 (Z) 线性表示;

(D) α_m 不能由 (Y) 线性表示, 且 α_{m-1} 不能由 (Z) 线性表示.

2. 设 r 与 s 分别是某线性方程组系数矩阵和增广矩阵的秩，若该方程组无解，则

(A).

（A）$s=r+1$；　　　　（B）$s=r$；

（C）$s=r-1$；　　　　（D）r 与 s 之间的关系不确定.

3. 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵的秩等于 1, 则必有

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$,　　　　(B) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$,

(C). $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$,　　　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

4. 设 A 是 $n(n\geq 3)$ 阶矩阵, 则 $(A^*)^*$ 等于（　　）.(其中 A^* 为 A 的伴随矩阵)

(A) A;　　$(B)|A|^{n-1}A$;　　$(C)|A|^{n-2}A$;　　$(D)E$.

5. 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是向量空间 R^n 的两组基,

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)A,$$

又 $\alpha\in R^n$，

$$\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=y_1\beta_1+\cdots+y_n\beta_n,$$

$$(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_n)B,$$　　则（ D ）.

(A) $B=A'$;　(B) $B=A^*$;　(C) $B=A$;　(D) $B=(A')^{-1}$;

三. 计算题(每小题 15 分, 共 60 分)

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$.

2. 求多项式$f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$的全部有理根.

3. 已知实对称矩阵空间$S^{2\times2}$的两个基分别为:

$$(\mathrm{I})\quad A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};$$

$$(\Pi)\quad B_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix},B_3=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}.$$

求由基(I)到基(Π)的过渡矩阵C;

4. 设 3 阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$,且对应$\lambda_1=-1$的特征向量为

$\alpha_1=(1,0,1)'$，求A.

四. 证明题(共 50 分)

1. （15 分）设$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$是整系数多项式，且$ac+bc$为奇数，

证明：$f(x)$在有理数域Q上不可约.

2. （15 分）设A是$n\times n$矩阵，b是n维列向量，证明：线性方程组$AX=b$有解的

充分必要条件$A'X=0$的解都是$b'X=0$的解.(其中b'为b的转置.)

3. （10 分）设A为n阶矩阵，证明:当正整数$m>n$时，$r(A^m)=r(A^n)$.

4. （10 分）设A是数域P上n维线性空间V的一个线性变换，在$P[x]$中

$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,且$f_1(x),f_2(x)$互素，

证明：$Kerf(\mathrm{A})=Kerf_1(\mathrm{A})\oplus Kerf_2(\mathrm{A})$.（$Kerf(\mathrm{A})$表示线性变换$f(\mathrm{A})$的核)