河南师范大学

二〇〇八年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：612 名称：高等数学 适用专业或方向：环境科学

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、 填空题（每小题 4 分，共 40 分）

（1） 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-c}{x+c}\right)^{x}=4$，则 $c=$ $\frac{4}{3},\frac{1}{3}$.

（2） 若 $x\to 0$ 时 $(1-ax^{2})^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ 0 .

（3） 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且当 x=1 时，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$f(\xi)=0$.

（4） 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ $\frac{f_h}{2h}=\frac{f}{3}$.

（5） 已知 $f'(e^{x})=xe^{-x}$ 且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ±1 .

（6） 设 $f(x)=e^{\tan^{k}x}$ 且 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e$，则 $k=$ ________ .

（7） 设微分方程为 $y''-2y'-3y=0$，则其通解为 y=-1或y=3 .

（8） 交换二次积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^{2}}}f(x,y)dy$ 的积分次序后为________ .

（9） 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=k$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x+a)-f(x)]=$ ________ .

（10） 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f'(x)=f(x)$ 且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$ ________ .

二、单项选择题（每小题 4 分，共 40 分）

(11) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

(12) 设 $f'(x_0), f'(0)$ 都存在，$f(0)=0$，则下面式子正确的是（　　）

（A）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$

（C）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\dfrac{1}{2}f'(x_0)$

（D）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=-f'(x_0)$

(13) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 和 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为（　　）

（A）$f'(1)-f'(0)>f(1)-f(0)$　　（B）$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

（C）$f(1)-f(0)>f'(1)-f'(0)$　　（D）$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(14) 下列说法正确的是（　　）

（A）无穷小是很小的数，无穷大量是很大的数

（B）无穷小实际就是零

（C）无界量就是无穷大

（D）无穷大是无界量

(15) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x} t^2 dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

（A）等价无穷小　　（B）同阶但非等价无穷小

（C）高阶无穷小　　（D）低阶无穷小

(16) 若 $\int_{-\infty}^{0} e^{ax} dx=\dfrac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

（A）2　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）0　　（D）1

（17）二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处（　　）

（A）连续，偏导数存在　　（B）连续，偏导数不存在

（C）不连续，偏导数存在　　（D）不连续，偏导数不存在

（18）微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式（　　）

（A）ae^x+b　　（B）axe^x+b

（C）ae^x+bx　　（D）axe^x+bx

（19）设 $y=f(x)$ 由方程 $xy+e^{x+y}=1$ 所确定，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$（　　）

（A）1　　（B）－1　　（C）0　　（D）e^{-1}

（20）设 $f(x)$ 具有连续导数，则 $\int\dfrac{f(x)+xf'(x)}{xf(x)}dx=$（　　）

（A）$\ln|xf(x)|+c$　　（B）$\ln|xf(x)|$

（C）$\ln|f(x)|+c$　　（D）$\ln|x|+c$

三、解答题（每小题 10 分，共 7 0 分）

（21）求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

（22）求 $\int\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

（23）求 $\int\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$.

（24）计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由中心在原点半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

（25） 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

（26） 设 $f^{(n)}(x_0)$ 存在且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0$，证明

$$f(x)=o\left[(x-x_0)^n\right] \quad (x\to x_0).$$

（27） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$