类别：B 卷试题

河南师范大学
二〇〇九年硕士研究生入学考试业务课试卷

科目代码：801 名称：高等代数 适用专业或方向：数学各专业

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、填空（共 40 分，每题 4 分）

1. $g(x)\neq 0$, 在 $g(x)$ 除 $f(x)$ 时 余数 是唯一的。

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 & 2-n \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2-n & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2-n & 2 & \cdots & 2 & 2 \end{vmatrix} =$ $(-n)^n$ 。

3. 设矩阵 A 的列为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，$\alpha_i$ 为 4 维向量，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，如果 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，则线性方程组 $AX=\beta$ 的通解为________。

4. 若 A 为 n 级方阵 且 $|A|=5$, 则 $|A^*-(\frac{1}{10}A)^{-1}|=$ $(-1)^5\cdot 5^{n-1}$ 。

5. 实对称阵 A 正定的充要条件是顺序主子式________。

6. 在有限维线性空间中，W_1,W_2 为子空间，则 W_1+W_2 是直和的充要条件是________。

7. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为________。

8. 在 Schmidt 正交化过程中求正交向量组 β_1,β_2 时，$\beta_2=\alpha_2-k\beta_1$，其中 $k=$ $\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}$ 。

9. 在 n 维空间中 $\dim(\sigma^2)^{-1}(0)+\dim\sigma^2(V)=$ n 。其中 $\sigma^{-1}(0)$ 表示线性变换 σ 的核。

$(\dim\sigma^{-1}(0)+\dim\sigma(V))^2=n$

10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量，则 $x=$________。

$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$

二、（15 分）多项式 $f(x)$ 满足 $f(a+b)=f(a)+f(b)$, 对任意 $a,b\in P$. 则存在 $k\in P$，使 $f(x)=kx$.

$f(a+b)=f(a)+f(b)$

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_nx^0$

$f(a+b)=a_0(a+b)^n+a_1(a+b)^{n-1}+\cdots+a_n(a+b)^0=a_0a^n+\cdots+a_na^0+a_0b^n+\cdots+a_nb^0$

$a=0 \quad f(b)=f(0)+f(b)$

$b=0 \quad f(a)=f(0)+f(a)$

$a,b=0, \quad f(0)=f(0)=0 \quad f(0)=0$

$a_0(a^n+b^n)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 4 \\ -1 & t & -1 & t^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 4 \\ 0 & t+1 & t-1 & t+4 \\ 0 & -2 & 2-t & -8 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 4 \\ 0 & t+1 & t-1 & t+4 \\ 0 & 1 & t-1 & 4 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 4 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & t-1 & 4 \end{pmatrix}$

三、（15 分）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=$$

$=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1+a_2 \cdots 1 \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 \cdots 1 \\ 1 & 1+a_2 \cdots 1 \\ 1 & 1 \cdots a_n \end{vmatrix}$

$=$

四、（15 分）问取 t 为何值时，下列方程组有解，并求其解（写出自由未知量的表达式）

$$\begin{cases} x_1+x_2+tx_3=4 \\ -x_1+tx_2-x_3=t^2 \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}。$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & t & 4 \\ -1 & t & -1 & t^2 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$ $A\neq 0$

五、（15 分）设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\ 2}+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$，用正交替换化它为标准形。

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

六、（15 分）设 $A=(a_{ij})_{nn}$ 为实对称阵，满足：

$$a_{nn}>0,\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}>0,\cdots\cdots,(\text{依次类推})\cdots\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}>0,$$

证明：A 为正定矩阵。

七、（15 分）设 V 为数域 P 上的 n 维线性空间，σ 是 V 的一个线性变换，且有 $\xi\in V$ 使得 $\sigma^{n-1}\xi\neq 0$，而 $\sigma^n\xi=0$．证明：

（1）$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$ 也为 V 的一组基；

（2）V 的任一个非零 σ-子空间都包含 $\sigma^{n-1}\xi$．

八、（20 分）设 A 为实方阵，证明 $AX=\beta$ 有解充要条件为 β 与 $A'X=0$ 的解空间正交。

$\sigma^{n-1}\xi\neq 0,\sigma^n\xi=0$ $\sigma^{n-1}\xi\neq 0,\sigma\cdot\sigma^{n-1}\xi=0$ $\sigma^{n-1}\xi\neq 0,\sigma^n\xi=0$

$\sigma^{n-1}\xi$

$A=$ $(A'X,\beta)=0$ 解

$AX=\beta$ $(AX,\beta)=0$ $A'X=\beta$

$AX=\beta$

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

$\sigma\xi$ ~~$\sigma\xi$~~ $\sigma\xi=\xi_1$

$3x_1=0$

$k_1\xi_1$

$x_2=x_3$

$x_2=x_3$